

1. STRUTTURA
2. VINCOLO / TRAVI / APPOGGI
3. EQUAZIONE DI EQUILIBRIO STATICO / REQUISITI STRUTTURA
4. MOTO D'INSIEME
5. REAZIONI VINCOLARI / CARRELLI
6. VINCOLI PERFETTI / CERNIERA
7. ALTRI TIPI DI VINCOLI
8. INCASTRO / MENSOLO INCASTRATA / TRAVE APPOGGIATA
9. PATTINO / GLIFO / ANALISI STRUTTURE VINCOLATE
10. SISTEMI LABILE - MALPOSTO - ISOSTATICO - IPERSTATICO
12. SISTEMI DI FORZE DISCRETE O CONTINUE
13. FORZE DISTRIBUITE / SISTEMI EQUILIBRATI / PROPRIETA' DEL TRASPORTO
14. MODELLO DI CARICO
15. DENSITA' LINEICA
16. CARICO UNIFORME E TRIANGOLARE
17. SCHEMA DI CORPO LIBERO IN EQUILIBRIO / CINEMATICA FINITA DEGLI SPOSTAMENTI DI UN CORPO RIGIDO
18. TRASLAZIONE / ROTAZIONE
19. PARAMETRI LAGRANGIANI
20. CINEMATICA LINEARIZZATA / PRINCIPIO DI SOVRAPPORZIONE DEGLI EFFETTI
21. TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI
23. RISOLUZIONE TRAVE APPOGGIATA
24. RISOLUZIONE MENSOLO INCASTRATA
26. SOLLECITAZIONI INTERNE
27. SPORTE ASSIALE / TAGLIO / MOMENTO FLETTEnte - TORCENTE / CASO PIANO
28. DIAGRAMMI DI SOLLECITAZIONE / EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO DELLA TRAVE
29. APPLICAZIONI

33. SISTEMI ARTICOLATI DI CORPI RIGIDI
34. CERNIERA - PASTIGLIA INTERNO / EQUILIBRIO GLOBALE
35. EQUILIBRIO DI OGNI SOTTOSTRUTTURA
37. PORTALE / ARCO A TRE CERNIERE
39. SCHEMA RETICOLARE
40. METODO DEI NODI
41. [ESERCIZIO]
45. METODO DELLE SEZIONI DI RITTER
47. NODO TRIPLO / [ESERCIZIO]
49. TRAVE GERBER / [ESERCIZIO]
51. ERRORI CONCEPITI GRAVI / CENNI SUI MATERIALI DA COSTRUZIONE
52. PROVA DI TRAZIONE

Prof. Fabio Brambilla (Sci delle costr.) - Ricevimento: martedì pomeriggio 16.00
 nel dip. Strutture

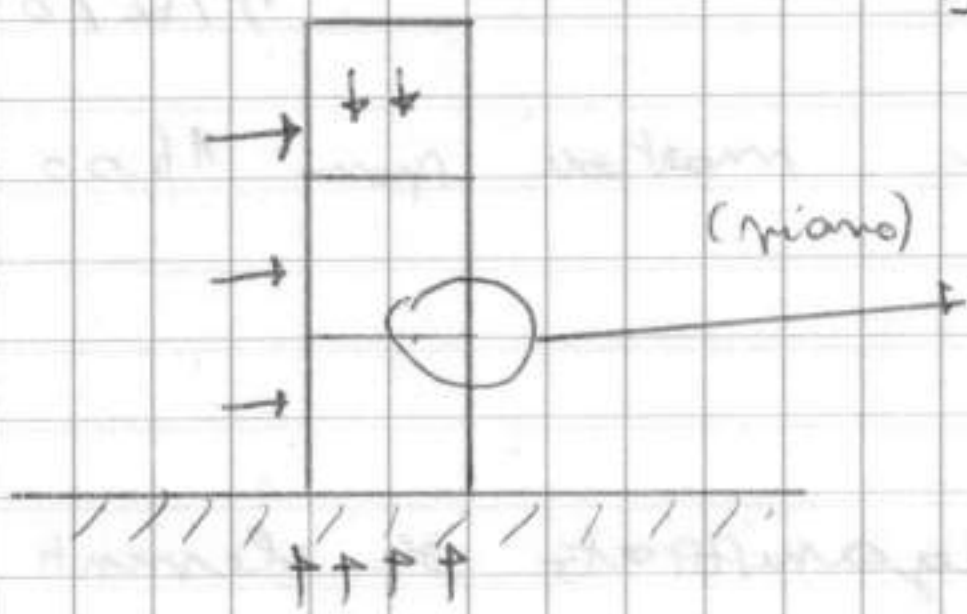
H

STRUTTURE (ing. civ.): qualunque complesso organizzato di elementi che svolgono una funzione primaria per la sicurezza del punto di vista della resistenza alle azioni.

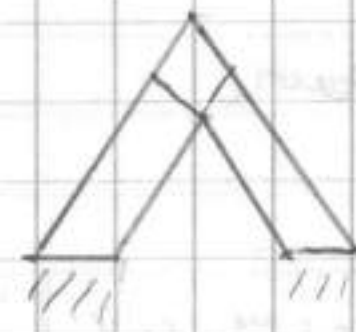
Le azioni sono ciò che struttura si trova a scambiare con ambiente con cui si trova. Qualunque elemento svolge 2 fun. fondamentali:

- 1) l'obiettivo della sua costruzione (es. aula con elementi archivi)
- 2) Interagire con ambiente \rightarrow forza di gravità. Strutture come 2VM terra $\approx 800 \text{ k/m}^2$ al piano. Carico utile al max di $1/10$, al max. 10 kg. Prima azione dominante ambientale è f. grav., poiché il vento, la temperatura, i rumori. Qualunque oggetto ha funzione strutturale, alcuni sono primari (es. pilastre) altri no (struttura fine a se stessa) \rightarrow intrinseca, implicita. Per le prime c'è obbligo su leggi di analisi. Elementi primari sono elementi portanti verticali, orizzontali (travi) \rightarrow soffono solai. Anche i solai hanno f(x) strutturale primaria. È primario tutto ciò che trasporta effetti all'ambiente \rightarrow ogni volta che si analizza struttura si sta individuazione delle interazioni a contorno. Es. molice: effetti corrente, effetti ambientali, effetto terreno... \Rightarrow si conosca al contorno di problema analitico, Effetto "force", interazione col terreno limita il numero moto degli elementi strutturali. f(x) primaria ing. civ. è non molice. Si deve "limitare" moto (e' impossibile non avere una \vec{V}). V elemento strutturale dobbiamo vedere cosa a contorno. Poi si analizza singolo elemento (es. trave) e anche qui analizzare le cond. a contorno. In ing. civ. utilizziamo rappresentazione completa semi-empirica della forza.

Dinamica limitata da presenza terreno.



(oppure l'arco)



le +
trasmissioni

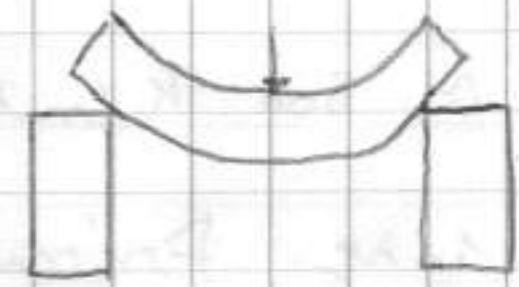
Preso la trave, la palo, ci mette tutte le interazioni di porta e muratura che la porta. Elementi che impongono



come il moto devono imporre il moto su

corpo rigido. Le interazioni con l'esterno, la modellazione diretta ed evitare il possibile moto della struttura si chiama

VINCOLO. Possono deformarsi (poco) ma è un moto di corpo deformabile.



Ex: TAV (pilastro ~ "pila" traliccio ~ "travate o impalcato") 30 mt.
→ 1 dimensione è maggiore rispetto alle altre due

TAV in mt. longitudinale è > mt. trasversale

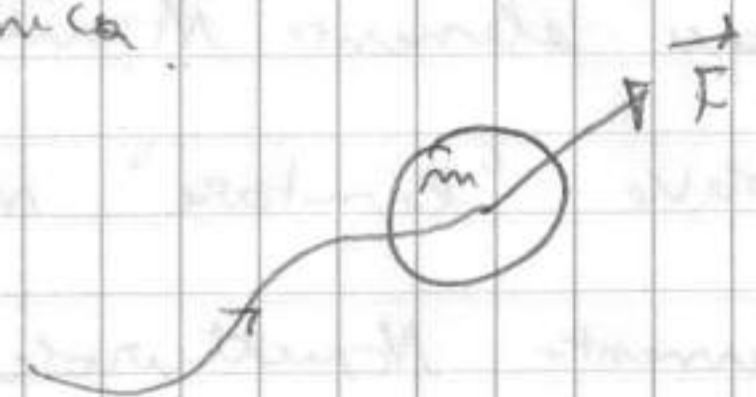
Elementi a croce (5°) sono "controventi", ma anche TAV: servono a mantenere azioni trasversali vento; impongono spostamenti laterali → (ex. con pilastro alto e sottile)

⊙: PULVINO (tra impalcato e pila). Si preannunciano allungamenti

Ti preannunci x alloggiare interazioni (APPOGGI). Si deve evitare anche la deformazione termica. Se struttura è lunga effetto è importante; ex. trave cara si allunga poco. Ci sono anche elementi che non limitano moto strutturale.

Elementi strutturali rispettano tutte leggi meccanica.

Equazione tra risultanti di forza e azioni inerziali: $\vec{F} = m \vec{a}$



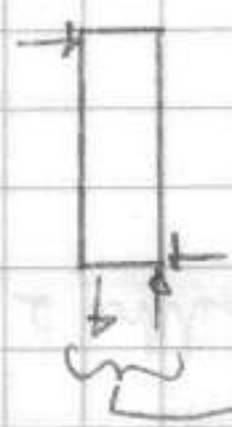
Noi vogliamo che a, v di insieme → a 0, molto piccoli rispetto al tutto. Ex. vibrazioni nel telaio devono essere piccole rispetto

② all'azione dell'intera. Deve generare azioni inerziali trascurabili

rispetto al resto \rightarrow $\vec{F} = 0$ \rightarrow deve essere nulla la
sommatoria di tutte le forze manifestate dalla struttura

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO STATICO \rightarrow EQUAZIONE di EQUILIBRIO
DELLA STRUTTURA
(assenza di forze di inerzia)

Se non sono trascurabili si parla di dinamica strutturale.



Es. azione del vento, lì deve essere anche annullamento
dei momenti.

+ grande azione vento. Ci sono strutture lunghe e sottili.

Se ci sono azioni trasversali rispetto all'asse linea d'asse, in queste
eq. di equilibrio \rightarrow a mancare delle forze a contorno + grandi di
quelle applicate.

Struttura deve rispondere a requisiti:

12/12/05

- FUNZIONALI (FUNZIONALITÀ) [obiettivi in ingegno]

- SICUREZZA \rightarrow obiettivo finale di qualunque progettazione.

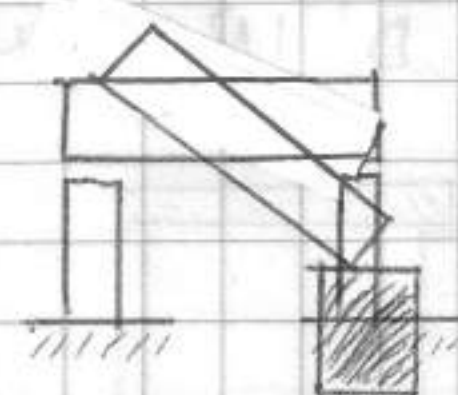
La sicurezza è limitata una Σ di fatti: (non sempre si può evitare qualcosa)

• MOTI D'INSIEME

• DANNI AI MATERIALI STRUTURALI

• DEFORMAZIONI PERMANENTI (sottoinsieme del precedente). Struttura una
volta caricata si deforma. Una volta rimosso il carico strutt. deve
tornare a conforma. geometrica precedente [altrimenti c'è accumulo]

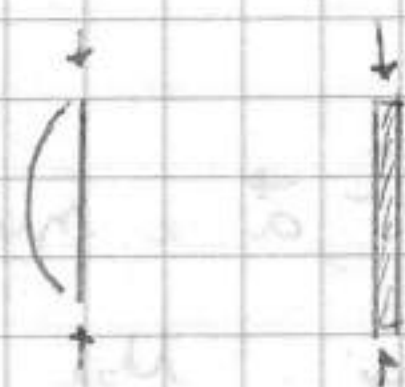
• INSTABILITÀ DELLE STRUTTURE. / Può accadere che la
fondazione ha cedimento \rightarrow travata segue il
moto e si inclina, varia il suo angolo



geometrico. Ex. muro di contenimento che può
ruotare [mura di contenimento ci sia un
sasso = deformazione permanente].

L'instabilità è dovuta a inflessione

[solo negli ultimi 100 anni è stata formalizzata]



la tecnica a cura della disponibilità dell'acciaio \rightarrow impromissibilità
 di una trattazione semi-empirica: instabilità è venuta dopo e in
 più o meno \rightarrow ex. 1985 crollo del polsotto dello sport di Milano]

\rightarrow Clam di problematiche
 Queste caratteristiche sono la RESISTENZA ad azioni esterne

Inoltre non deve avere:

- DEFORMAZIONI ECCESSIVE
 - VIBRAZIONI/OSCILL. "
- } SERVIZIO \rightarrow la sua funzionalità. Struttura deve mantenere

Una struttura, pur avendo le 1° caratteristiche, potrebbe o vibrare troppo o
 deformarsi sotto carico. [ex: vii su www.OVERUP.UK x ponte del

millennio nel 2000 a Londra, era simile a componente strutturali del

piano umano. Se oggetto simile (ex. imbarcazioni) si deve camminare in
 fase con l'oscillazione \rightarrow eccitano il movimento]. \rightarrow si lavora quando si cammina

Pur le deformazioni elastiche ad ex. c'è stato caso circa all'eur dove la

deformazione termica ha marcato i vetri. \rightarrow cambiati telai.

C'è anche 3° clam di problemi. Struttura delle opere.

- DURABILITÀ [DETERIORAMENTO]. Si deve evitare/limitare con sua rovina (DURABILITÀ)

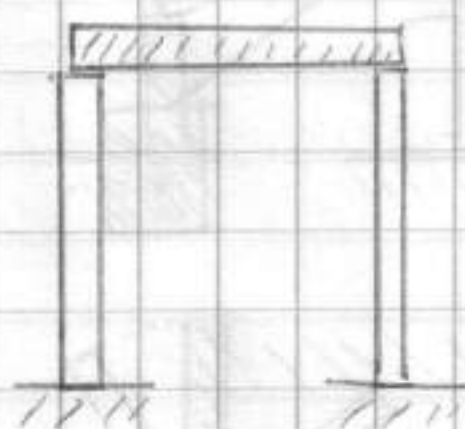
Struttura deve mantenere nel tempo tutti i requisiti di 1° e 2°. Deve

rimanere funzionale e sicura nel tempo. Molto attenzione agli

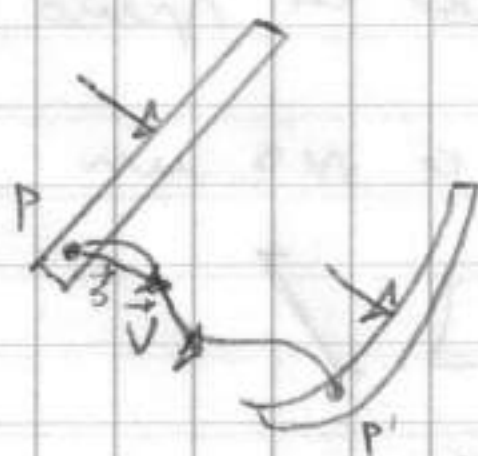
[vedi il "De Architectura" di Vitruvio]

H

MOTO D'INSIEME



Se nella struttura in posizione generica e sottoposta
 ad azioni ha un moto e si può deformare



Un punto P della struttura
 acquista una traiettoria
 e si trova in P' dopo t.

Abbiamo \vec{v} , \vec{a} e spostamento \vec{s} che è la congiungente tra P a $t=0$ e P a

② t qualsiasi. Noi non vogliamo questo moto (poco solo fino al

montaggio). Movimento nullo e' approssimazione.

Introduciamo quindi elementi strutturali che limitano il moto, collegati fino al terreno naturale ritenuto "indeformabile" \rightarrow inerzia e' elemento



grande oca non essere influenzato oca struttura.

[In aerei invece l'inerzia non

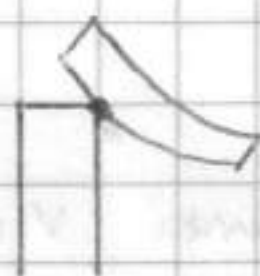
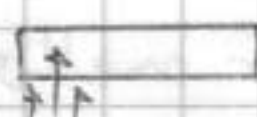
e' grande oca considerarsi nullo.]



Caricando la trave si sviluppano complicate forze di contatto



non uniformi (ex:



Su trave c'e' distrib. pressione non regolare.

Ci sara' risultante collegata al baricentro. L'elemento che limita il moto [VINCULO] e che ha effetto nel moto non può non avere anche un effetto sulle forze presenti.

Vincolo ha sempre doppio effetto [qualità]. Forze fornite dal vincolo sono chiamate REAZIONI VINCOLARI.

[\rightarrow Collochiamo elemento strutt. in base cartesiana 3d] nuovo sistema



ma i punti, movimento impedisce

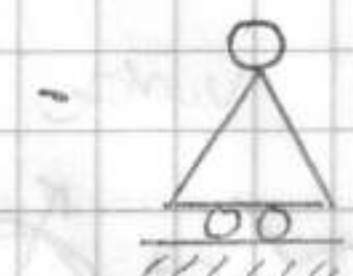
il moto VERTICALE della struttura,

quindi $\vec{a}_V = \vec{v}_V = \vec{s}_V = 0$.



A ciascun vincolo si associa simbolo proprio

traslazionale:



CARRELLO [nell'800 c'era innovazione acciaio, soprattutto nei ponti]. Simbolo rappresenta configurazione usata. Limita

moto verticale ma permette quello orizzontale.

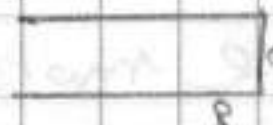
Il perno non permette la rotazione, mentre i rulli permettono spostamenti orizzontali. [Simbolo e' la stilizzazione, possono esserci + carrelli nei sistemi]




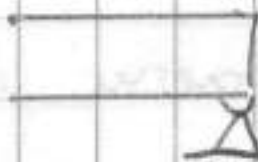
Per limitare moto di insieme anche in B e' utile avere un vincolo


ma se ne metteremo uno identico potremo avere moto su

insieme longitudinalmente [ex. frenata]. S. potrebbe mettere carrello 1

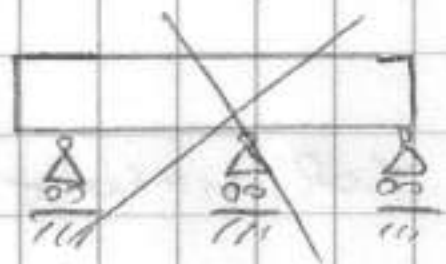
e quindi  ma invece si usa config. di prima SENZA rulli

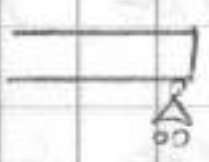
(x evitare complicazioni) inferiori:  → VINCOLO MULTIPLO che impedisce
+ di una componente del moto contemporaneamente [carrello e vincolo

semplice]. Simbolo analogo senza rulli: 

- VINCOLO a TERRA:  dove per "terra" si intende tutto il "resto" [ex.
qui il muro è "TERRA"]. Questo vincolo che limita il moto verticale e
orizzontale si chiama CERNIERA.

Per e/l. il moto si impone quanti vincoli devo mettere? Quanti sono
i gradi di libertà di moto? Sono 3 [in moto piano]: 2 traslazioni +
la rotazione. Dovremo mettere almeno 3 vincoli x limitarli tutti. Ma con
una precisa disposizione. Ad ex. ho 3 carrelli (numero di).



Verticale [uno solo non basta ]. La formulazione
corretta è con 2 (un carrello in A e cerniera in B)



che limita anche rotazione.



Quanti sono VINCOLI PERFETTI [NON DEFORMABILI → approx spesso eccellente &
PRIVI DI ATRITO → approx. eccellente a volte].

Atrito ha 2 tipi di effetto: 1) GENERA FORTE [ex. pile ponte dove
reazione completa, attrito può star fatto e la considerate; sono chiamate
forze parassite] 2) SPORRANO ENERGIE di oscillazione e vibrazione (urti)

Quando si impedisce moto si introducono reazioni vincolari vinche

come risultanti reazioni effettive, ex. cerniere che rotte



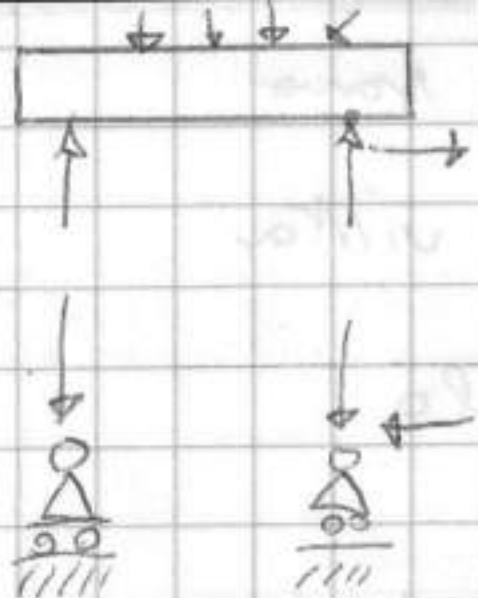
carroli si schiacciano [contatto orizzontale tra 2 superfici
cilindriche] e si crea superficie di contatto.

DURATA di un VINCOLO PERFETTO, ovvero reazione a forze di contatto e

collocata nel vincolo e agisce nella stessa componente [e' ovvio → a

verticale corrump. verticale] ed è impedito il moto associato, (altrimenti

⑥ simultante cambia → vale solo se vincolo è perfetto).



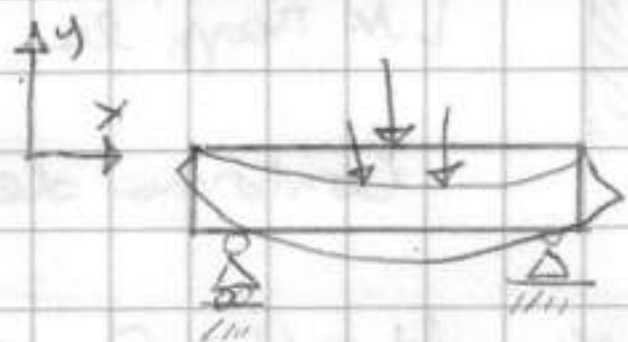
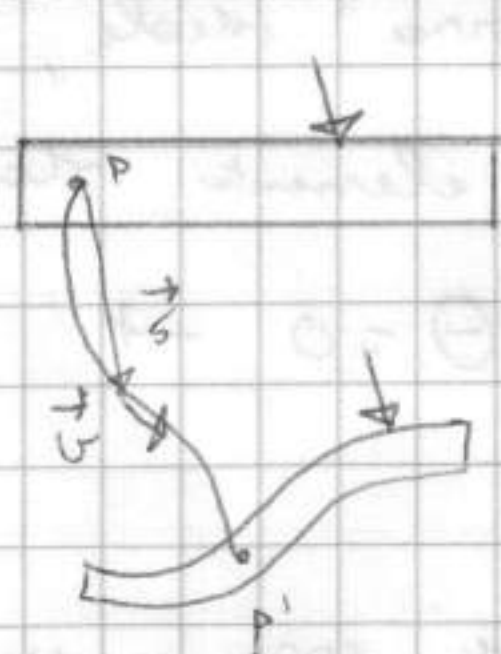
Su struttura c'è F. verticale e un carrello F. verso basso.

[nei vincoli perfetti è nullo anche il loro peso]

Cerniera invece anche "→", può essere collocata in qualunque situazione.

Azioni e Reazioni devono avere risultante nulla.

13/12/2009



→ non è permesso il moto di insieme

[può essere deformazione elastica]

sotto carico] Nell'analisi ci interessa la configurazione finale dopo che viene caricata la struttura

○ [senza carichi]. Prima grandezza da guardare è lo spostamento su ciascun punto. In 1° fase $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. [carico o deformazione → ANALISI STATICA su una struttura]. Fissando un $o(x, y, z)$ tutte le grandezze saranno del tipo $\vec{S}(x, y, z)$, esprimibili in componenti:

$$\begin{cases} \vec{u}(x, y, z) \\ \vec{v}(x, y, z) \\ \vec{w}(x, y, z) \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Quest'analisi serve a} \\ \text{fin. e' cinematica} \end{cases}$$

Componenti di \vec{S} nella direzione dei 3 assi cartesiani

P.to vicino ad appoggio altra comp. Verticale < di p.to al centro sol. ex.

Un'altra considerazione su strutture civili, a rispetto requisiti di servizio, gli spostamenti devono essere piccoli ($1/1000, 1/10000 \dots$) rispetto a dim. struttura.

//

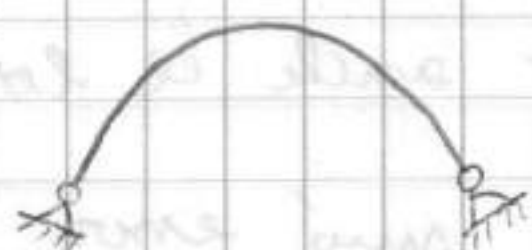
ALTRI TIPI DI VINCOLI

Vincolo ha sempre effetto cinematico, statico.

• $V=0$ ↑ (impedisce moto verticale). Carrello può muoversi in direzioni diverse. → impedisce spostamento inclinato $S=0$ secondo la sua linea d'azione e ⊥ a possibile suo moto.

• $u=v=0$; → impedisce u e v (7)

Ex. ponte ; Ex. Copertura Mat. Centrale Milano. Cerniere sono inclinate: stol n.b. di vista statico non cambia nulla.



• (vincolo COMPLETO) Oggetto che impedisce sia u, v che la rotazione.

Ex: balcone edificio

SIMBOLO:

[In rapp. la "terra" ideale, Contorno dell'elemento sta



manipolare]

Impedire $u=v=0$ e $\Theta=0 \rightarrow$

INCASTRO (o incastro perfetto).

Come effetto statico fornisce \uparrow e una componente di coppia, un momento $\curvearrowright \Rightarrow \uparrow$

Ex: edificio Morilo con muratura portante; balcone con travi.



Quando carico oggetto, come mora' fanno?

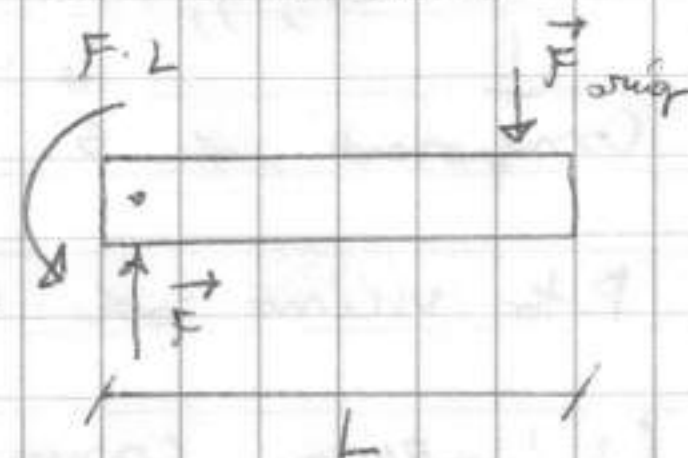
A m. ① ho distrib. pressioni verso muratura > allo spigolo; tende a ruotare e a spingere sopra \rightarrow distrib. pressioni all'estremità verso il lato ②.

Non sono uguali, c'è la forza applicata. Il vincolo d'incastro dà forza verticale \vec{F} ed un effetto forte di coppia.

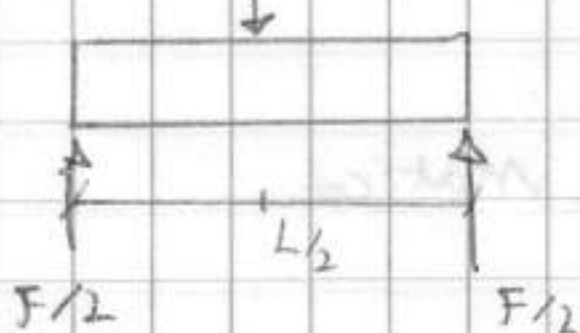
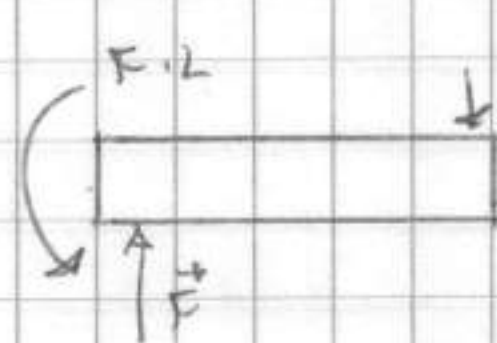
\vec{F} orig tenderebbe a fare \curvearrowright ma coppia del

vincolo lo contrasta: $\curvearrowleft \rightarrow$ mora' $F \cdot L$.

Si generano f. v. ab. grandi.



È strutturalmente meno efficiente di una trave appoggiata \rightarrow ciascun



muro portera' $\frac{1}{2}$ forza. Azioni si distribuiscono tra i vincoli e la reazione è $<$ della F

applicata.



\rightarrow genera forze che da effetti molto + grandi della F originaria $[F \cdot L]$, effetto "apribottiglia", leva con braccio massimo

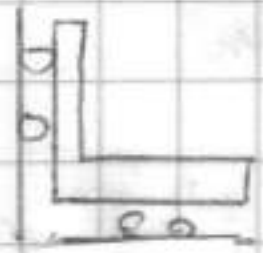
⑧ [Schema statico di murata]

Doiché la parte interna è $< 90^\circ$, le risultanti si equilibrano le momenti devono essere $||$ maggiori.

Più si crea spazio sotto a struttura, + a moltono forte granoni.

Di fatto ∞ vincoli a seconda dell'applicazione, della situazione.

- Vincolo che impedisce la rotazione



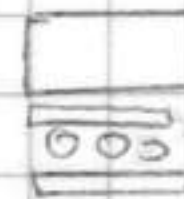
Due movimenti in u e v ma la combinazione col

angolo impedisce $\theta = 0$. Reazione \curvearrowright [a volte chiamato PATINO MULTIPLO]



Non è consentita la rotazione e

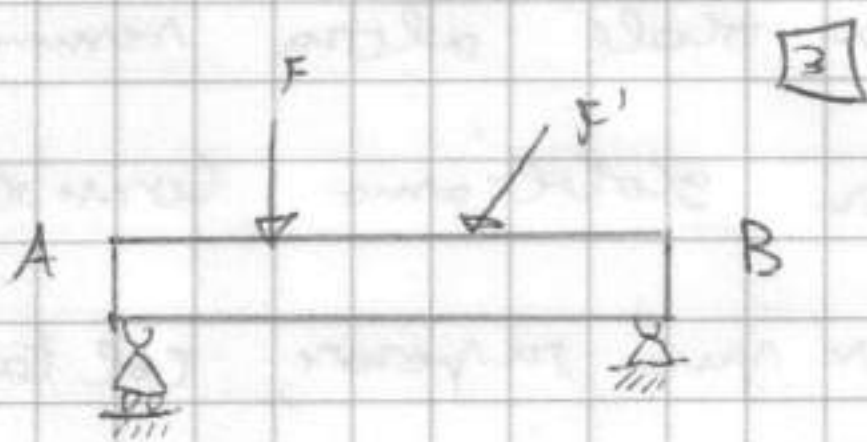
lo spostamenti verticali.



Si chiama GLIFO [anche detto PATINO]

H

COME ANALIZZARE STRUTTURE VINCOLATE



T. app. Deve comunque rispettare le eq. cardinali meccanica. Complessivamente $\vec{F} = 0$

(risultante f. agenti nulle).

Conviene anche dividerla per componenti [nulle

u, v, θ] \rightarrow si trovano relazioni che esprimono l'eq. in dir. verticale, orizzontale, e quella "di momenti" \Rightarrow nulla quella totale.

Per 1 singolo corpo scriviamo 3 eq. di equil. indipendenti. Rispetto a quale configurazione? Solo corpo in deformazione! Se effetto è forte possono cambiare dim. strutturali complessive. Se spostamenti sono piccoli

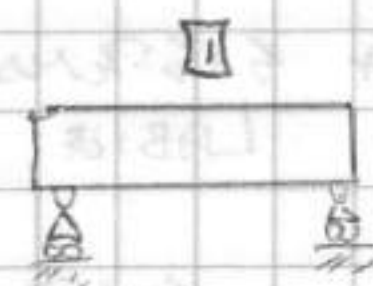
le 2 config. sono vicine e simili \Rightarrow si può trascurare la variazione.

[non sempre possibile; ex. instabilità \rightarrow riga, compressa \rightarrow \curvearrowright]

Si assume come riferimento la CONFIGURAZIONE INIZIALE.

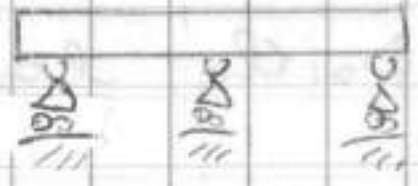
Corpo deve imporre i 3 gradi di libertà.

Ex.

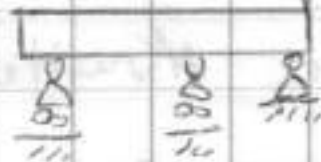
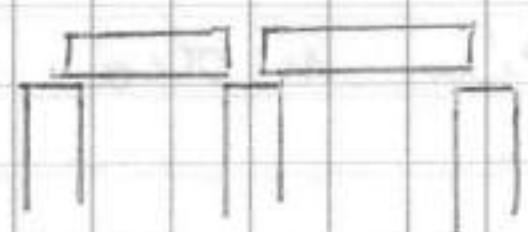


$\rightarrow m$


Vincoli insufficienti.

È importante anche la disposizione oltre che al numero:  II

Potremmo avere + vincoli di quelli che mi servono ma che

non sono importanti correttamente:  ; ex. Pouti: 

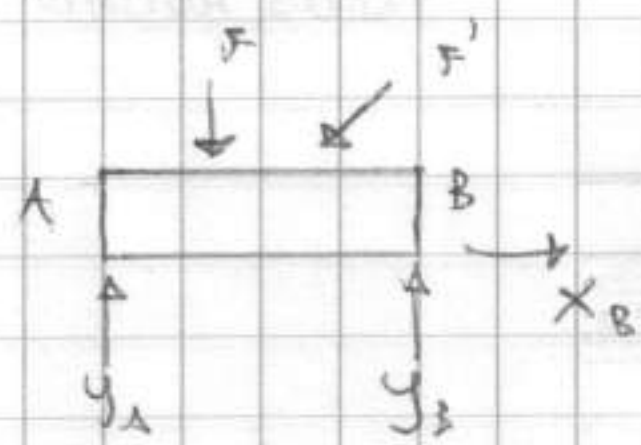
Si può usare:

 → senza giunti, modificati

e non come pezzo unico su più appoggi.

Analicamente, tr. app. e questa disposizione sono molto diversi.

Ex: tr. app. in equilibrio: Quando sono presenti tutte le azioni,



quelle esterne sono **TERMINI NOTI** invece le reazioni sono **INCOSISTE**.

X: Reazioni orizzontali; Y: Reaz. Verticali con

segni x il n. to di applicazione.

Se ho stessa struttura con vincoli maggiori:

Nel **I** ho 3 eq. di eq. indipendenti x 2

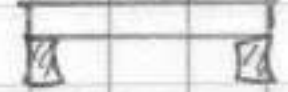
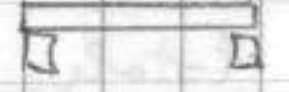
(incognite → no soluzione), **II** ci sono da una parte ∞ di altre allora nessuna.

Potremmo risolvere solo **III** e **IV**. Per gli altri dobbiamo considerare


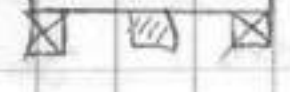
altro. Ex: 3 persone possono portare trave e 1 ne può reggere, col tappeto

no. ⇒ si deve considerare anche la **DEFORMABILITÀ**.

Ex: trave su due cunei di calcestruzzo **I** e app. su 2 blocchi di gomma **II**

I  **II**  Sono importanti a stesso carico.

Se appoggi sono >, ad ex gomma tra i due calcestruzzo, non si creta ⇒ conta

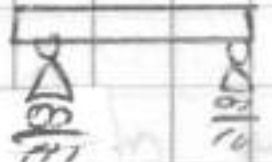
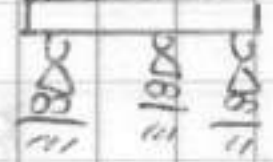

la deformabilità dei corpi  ; viceversa 

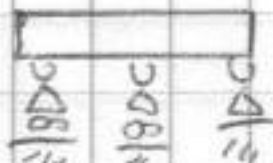
↓

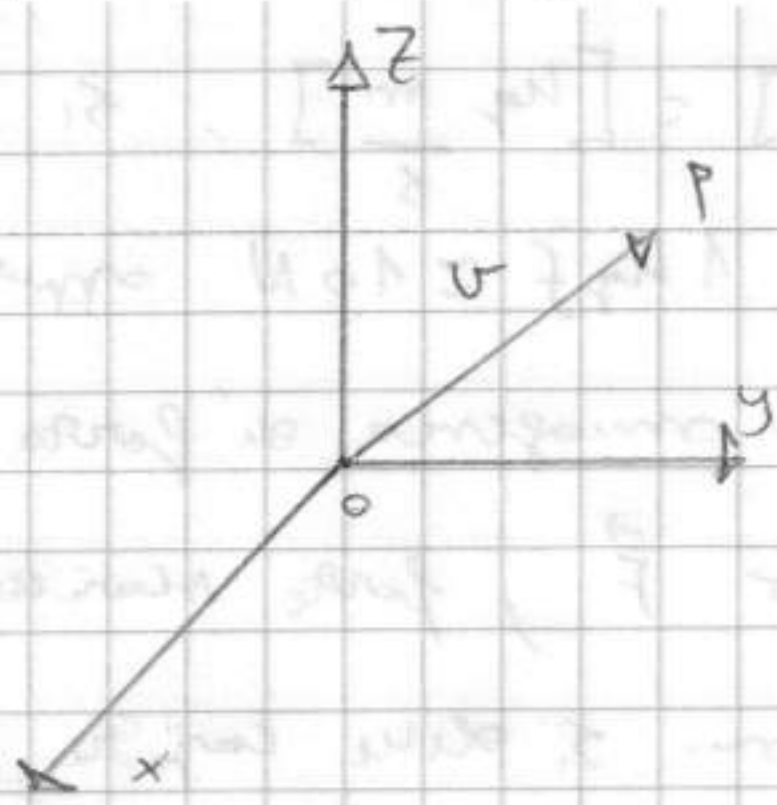
Per **III** e **IV** bastano le eq. di equilibrio x sapere reazioni vincolari.

Per **I** e **II** la distribuzione delle forze è data dalla deformabilità

appoggi. [aggiungiamo altra eq. con stessa incognite riferite a deform.]

 → SISTEMA LABILE ;  → SISTEMA IPERSTATO ;  → SISTEMA ISOSTATICO [n. eq. = n. inc.]

III  → SISTEMA IPERSTATICO



$v := (P - O) \rightarrow$ distinguiamo modulo e mod. vettoriale

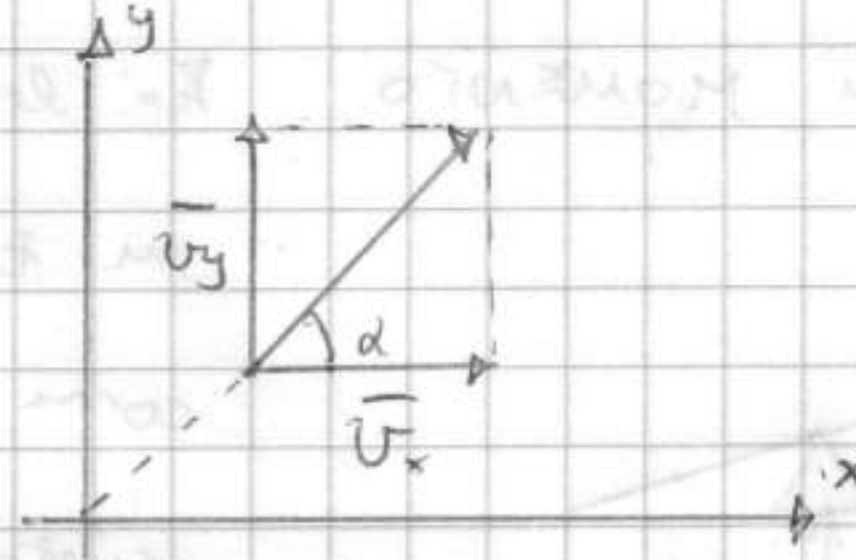
$$\vec{v}, \bar{v}, \underline{v}$$

$$|v|, |\vec{v}|, \underline{v}$$

Nel piano xy

$$|\vec{v}_x| = |\vec{v}| \cos \alpha$$

$$|\vec{v}_y| = |\vec{v}| \sin \alpha$$



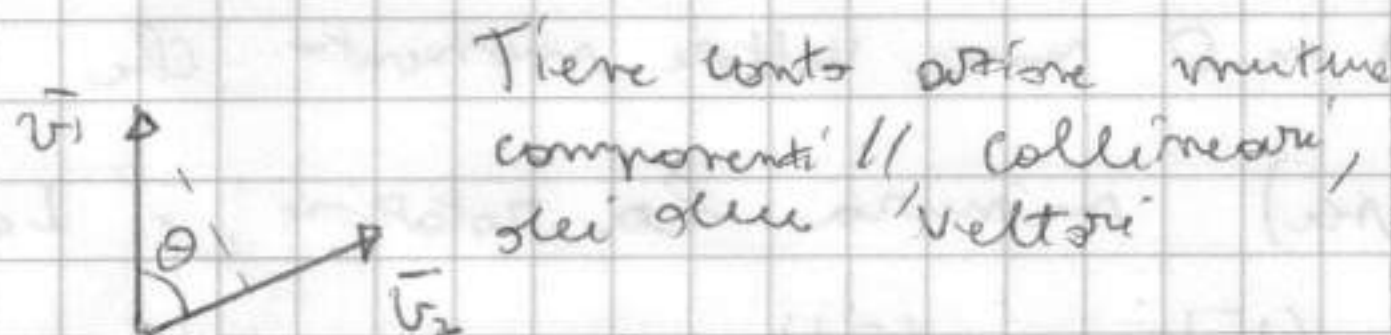
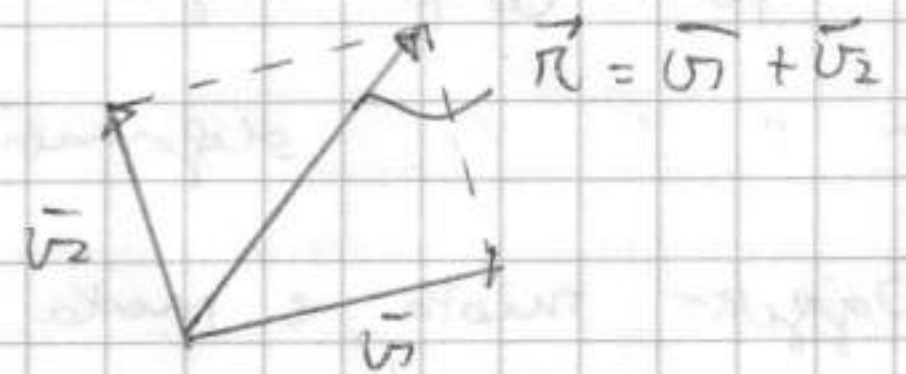
Dati v_1, v_2 la loro composizione è stata dalla regola del parallelogramma

$$|\bar{r}| = |\bar{v}_1| + |\bar{v}_2|$$

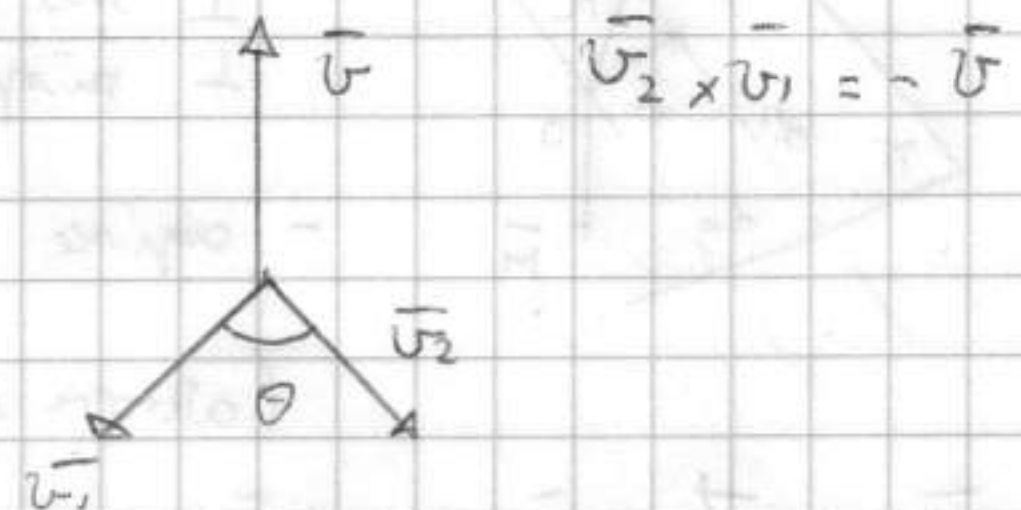
1) Prodotto scalare: $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 \rightarrow$ quant. scalare

2) // Vettoriale: $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 \rightarrow$ // vettoriale

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = |\bar{v}_1| \cdot |\bar{v}_2| \cos \theta$$



Tiene conto azione mutua componenti // collineari, dei due vettori



Se ho forza in una certa dir. e mi muovo azione in dir. diversa da verso con il p.s. \rightarrow lavoro

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1$$

$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \bar{v}$ ortogonale al piano definito da \bar{v}_1 e \bar{v}_2 . Verso definito da come \bar{v}_1 ruota per arrivare a \bar{v}_2


$$|\bar{v}| = |\bar{v}_1| \cdot |\bar{v}_2| \sin \theta$$

H

Forza è azione che cambierebbe stato di moto di qualunque oggetto dotato di massa.

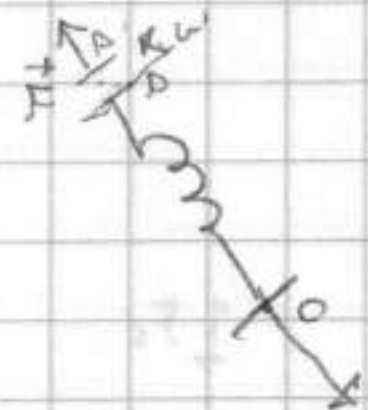
Si analizzeranno le FORZE PESO $[\vec{F} = m\vec{g}]$, le FORZE di REAZIONE VINCOLARE,

FORZA VINCOLARE: ex. molla appoggiata su un vincolo che impedisce il

movimento:  forza reattiva che agisce nel p.to di contatto

nella dir. della f. peso ma con verso opposto; $R = -\vec{F}$, si vedrà la

FORZA DI RICHIAMO ELASTICO ex. molla bloccata ad un'estremità

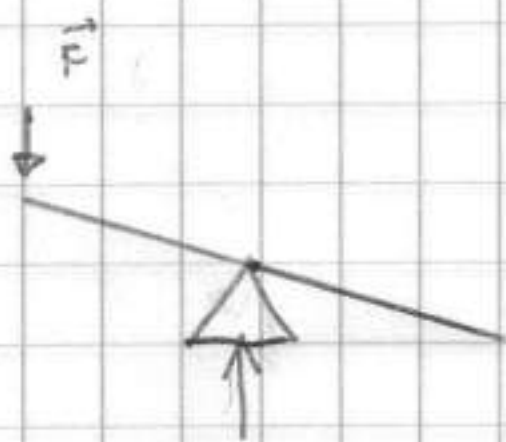


Applico forza che ha l'effetto di allungarla. Molla si è allungata di $P' - P$, ma la forza è simile a \bar{R} (dir. di \vec{F} e verso opposto) [trascuriamo F. peso] a causa dell'allungamento (11)

$\vec{R} = -\vec{F} = k(p' - p) = k\vec{v}$ dove k è la costante elastica della molla.

Attenzione alle unità di misura. $\vec{F} : \left[M \cdot \frac{L}{T^2} \right] = [N] = \left[\frac{kg \cdot m}{s^2} \right]$. Si usano anche: kN [kiloneuton, 1000 N]; kg / forza $\rightarrow 1 kgf \approx 10 N$ oppure $1 tf = 1000 kgf$. Ton. si diventa unità di misura omogenea di forza.

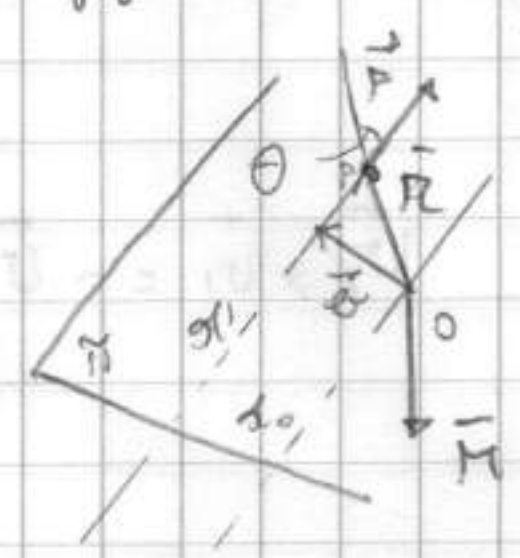
AZIONE di MOMENTO. Es. leva 1° genere e applichiamo \vec{F} , forze marcano



in terra sono marcano l'azione. Si delle capire come forze arrivano a Terra e come in si distribuiscono nelle strutture.

- per i corpi rigidi basta sapere i p. di vincolati
- " " " deformabili si deve analizzare anche la deformazione

Oggetto ruota, e ruota muove azione! Rotante, definito da un P.V.

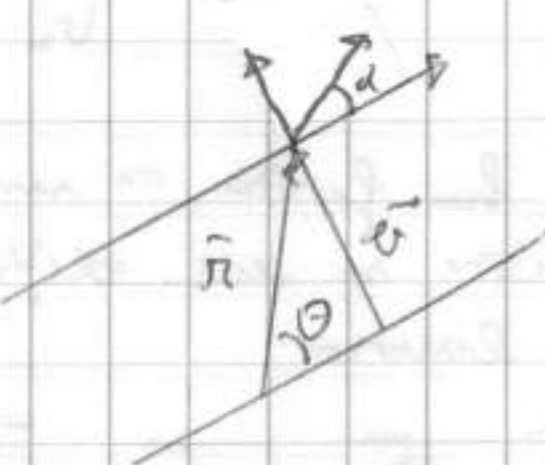


- la distanza è il vettore di momento minimo, che taglia \perp rispetto alle due direzioni parallele

- agisce forza $\vec{F} \rightarrow$ in O nasce vettore momento che (azione si distribuisce) minimizza la rotazione, \perp a \vec{r}

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$; $|\vec{M}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta$. ($|\vec{M}| \sin \theta = |\vec{r}|$)

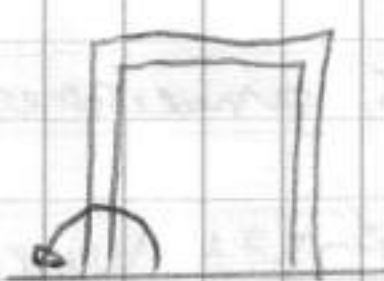
$|\vec{M}| = |\vec{F}| |\vec{r}|$. Risultante di una coppia di P nella direzione di. Componente di una generica forza \vec{F}



è \parallel a d_1 . \rightarrow \vec{F} è inclinata di α rispetto a d_1 primo componente lungo la dir. d_1 , perché conta componente \perp forza risp. alla distanza \vec{r} .

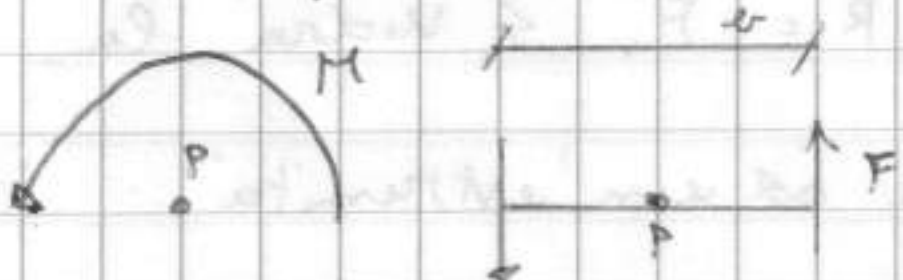
Il momento è dato da componente \parallel a d_1 .

$[M] = [F \cdot L]$; per strutture piane le azioni di momento



sono rappresentati: \curvearrowright che indicano azione di rotazione.

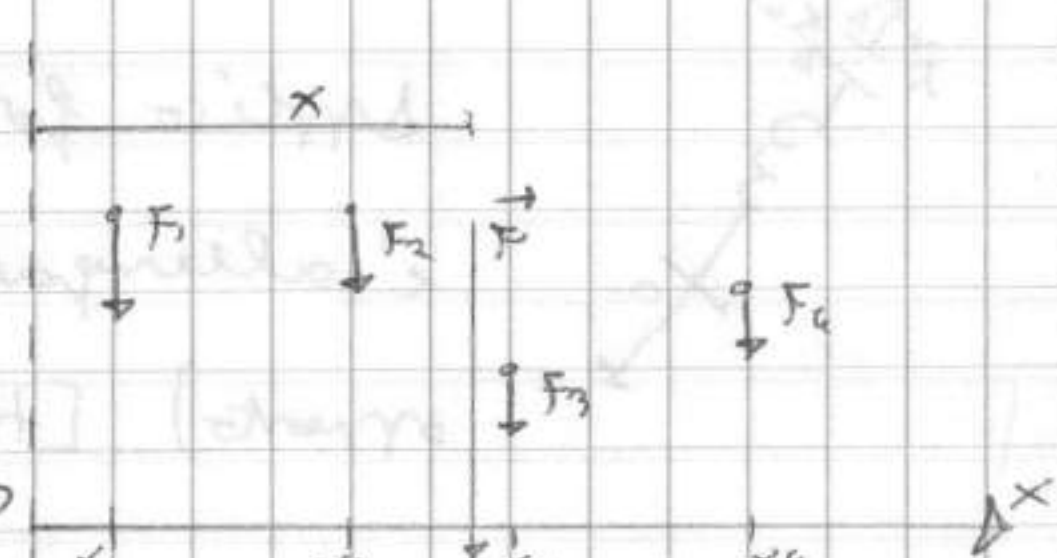
M si può rappresentare come la coppia di forze che lo genera



SISTEMI di FORZE DISCRETI o CONTINUI

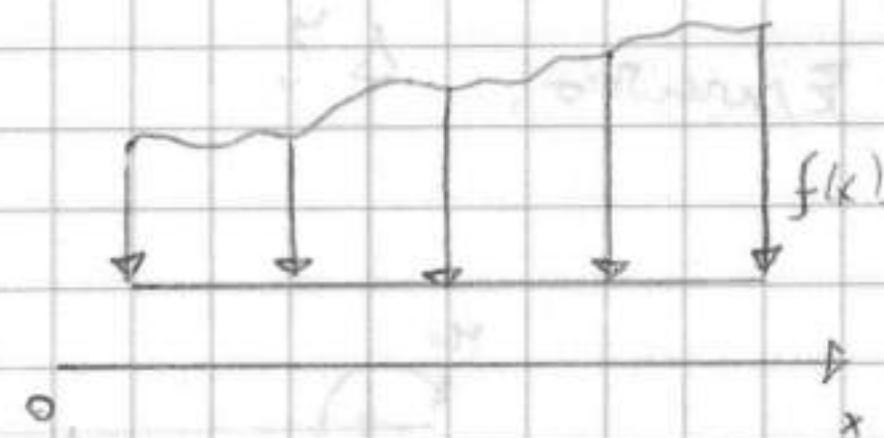
- DISCRETI: assi di riferimento (int. f. piano)

(12) primo trattare separatamente \vec{F} orizz. e verticoli,



quindi e' caso generale. Ci interessa il Modulo delle forze.

CONTINUE, DISTRIBUITE



I sist. di p.ti concentrati, applicati in p.ti diversi, si può definire un sistema risultante o equivalente. Minore azione unica f equivalente applicata nel Baricentro. (vale quando riempio sist. forze nelle stesse dir.) $F = \sum_i F_i$, la posizione x della risultante e' data da

$$x = \frac{\sum_i F_i x_i}{\sum_i F_i} \rightarrow \text{la stessa forza risultante e' data dalla media pesata delle distanze di ciascuna forza. Il numer.}$$

e' il modulo della F risultante; $F_i \cdot x_i$ e' l'azione di momento

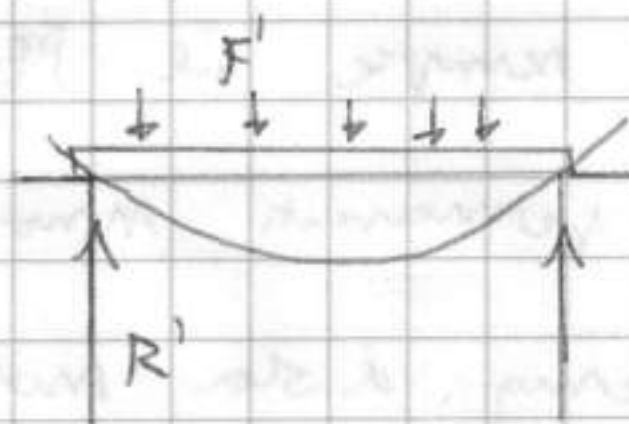
rispetto al polo 0 $\Rightarrow x = \frac{M_0}{F}$; F delle forze e distanza tale che

$$F x = \sum_i F_i x_i = M_0$$

Considero struttura vincolata con azioni applicate; ho effetto azioni che si propagano fino a p.ti di vincolo \rightarrow sistema reazioni e sistema equivalente delle reazioni.

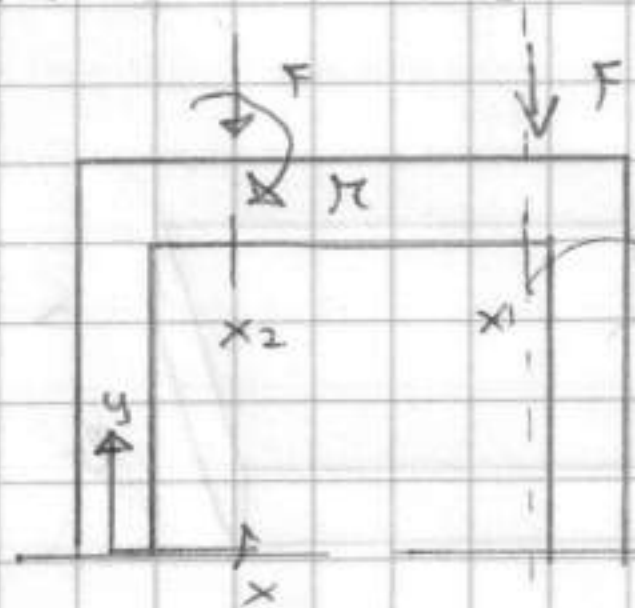
SISTEMI EQUILIBRATI

$$\begin{matrix} \text{Sist. } f \\ \text{applicato} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Sist. } R' \\ \text{reazione} \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} \text{Sist. } M' \\ \text{momento} \end{matrix} = \begin{matrix} \text{Sist. } M'' \\ \text{momento} \end{matrix} \quad \begin{matrix} F' - R' = 0 \\ M'_0 - M''_0 = 0 \end{matrix}$$



Es. tavola di legno inflessa, ma con sist. forze reattive. Sistema globale di forze delle forze EQUIVALENTE a 0

PROPRIETA' del TRASPORTO



Data struttura, fissiamo sistema di riferimento. forza agente in questa azione, effetto e' invariante nello s. Il p.t. di applicazione conta x solo minuire il braccio. ha rapporto del sistema e' il sistema

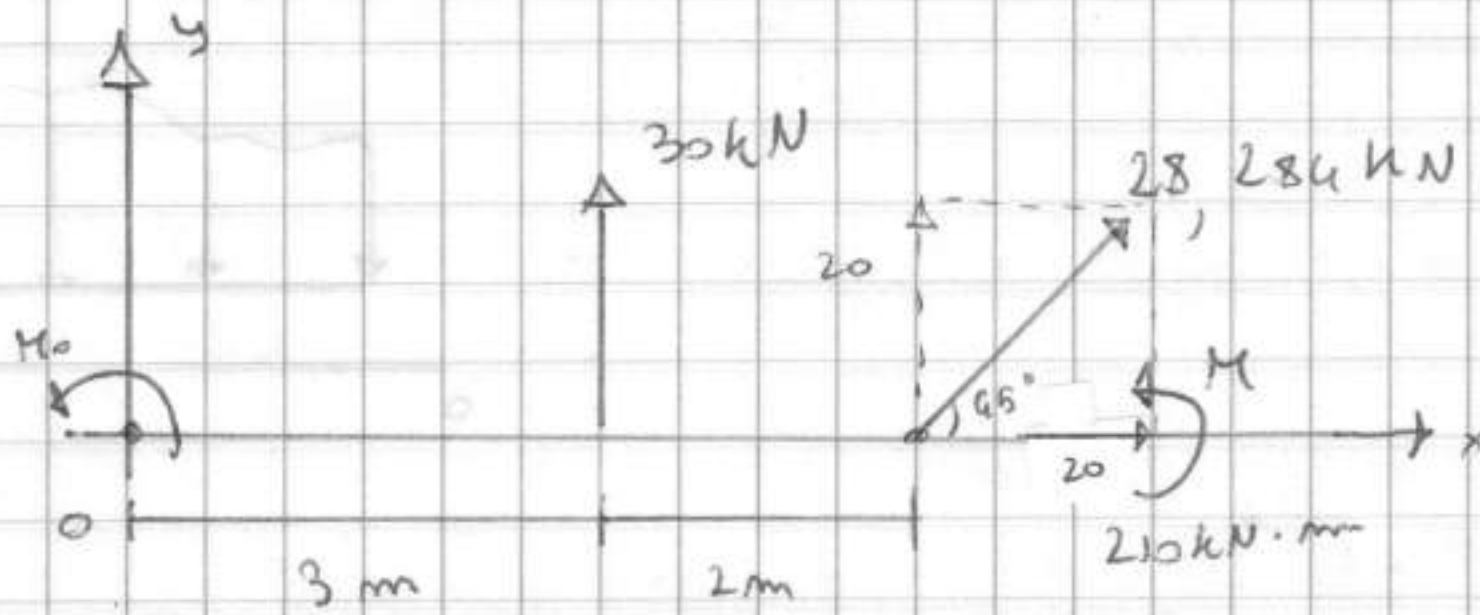
di reazioni e di forze che come si distribuiscono.

Pero' per forza F , spostarla in x_2 tenendo conto delle azioni di momento.

dove $M = F \cdot (x_2 - x_1)$. Ottengo lo stesso sistema di forze risultanti.

15/12/05

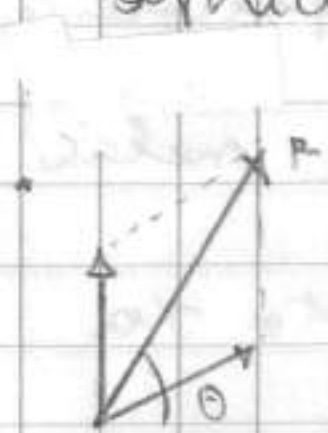
Esercizio:



- Collocare la risultante del sistema di forze

- Trovare il baricentro dove applicare risultante

- Collocare il sist. ris. equivalente (tr. trasporto) considerando tutto applicato in O



$$x) 0 + 20 \text{ kN} ; y) 30 \text{ kN} + 20 \text{ kN} \Rightarrow |R| \text{ tramite la}$$

$$\text{norma della forza: } \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{50^2 + 20^2} = 52,852 \text{ kN}$$

In piano coordinato e la DISTANZA EUCLIDEA

ha direzione d'angolo θ :

$$\tan \theta = \frac{50}{20} = 2,5 \rightarrow \theta = 1,107 \cdot \frac{180}{\pi} \approx 68,2^\circ$$

$$M_0 = 30 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 210 = 400 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

[x convenzione \odot e positivo il verso + dei momenti antiorari]

$$x_g = \frac{M_0}{R} = 8 \text{ mt} \quad (\text{c'è anche l'azione del momento})$$



Distinguere la FASE PROGETTUALE dove il modello di azione è stato a livello normativo che indicano le azioni che agiscono sulla struttura.

Conta sempre il PESO PROPRIO della struttura (permanente). Altri pesi permanenti sono arredi, trasmissioni, etc. in fase progettuale che eroga d'ora norme.

Poi ci sono i CARICHI ACCIDENTALI, applicati in determinati istanti (es.

es. la scivola su folle che d'istate destinazione d'uso dell'edificio,

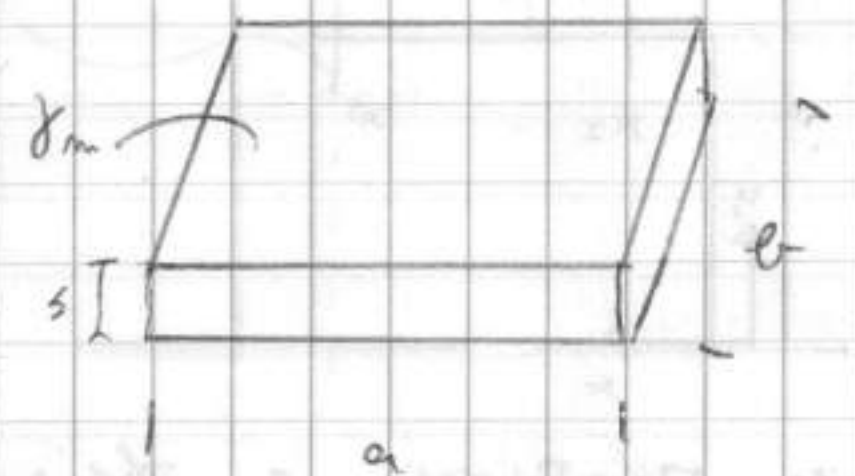
il carico di neve, etc.). Carichi applicati a struttura secondo il

MODELLO DI CARICO.

$$S_e \gamma_m = \rho_m g \left[\frac{F}{L^3} \right] \quad \text{Es: lastre}$$

Quanto pesa in F, x unità di volume.

Carico ripartito d'ora modello struttura.



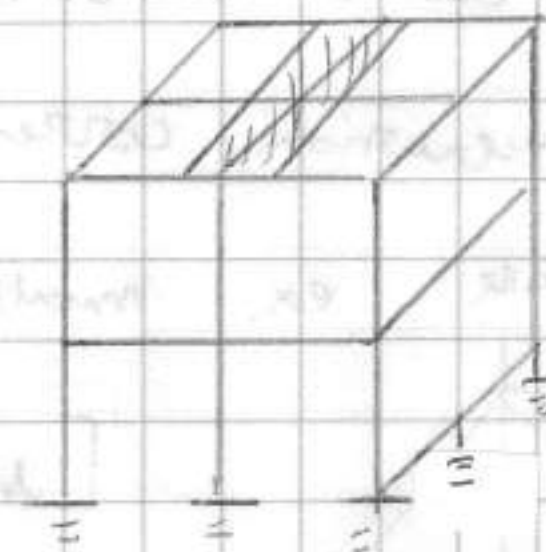
① (Strutture: oggetti 3D distinguibili x comportamenti di struttura),

Si può distinguere l'azione dei TELAI PRINCIPALI (che agiscono lungo la direzione delle travi principali dell'edificio) dai TELAI SECONDARI (che agiscono in direzione delle travi secondarie)



Problema ridotto in 2 sottoproblemi piani. Cambiano sezione travi e pilastre e carichi applicati

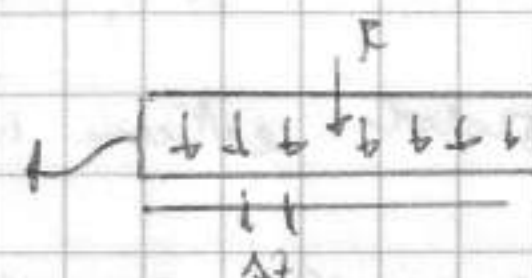
Dobbiamo trasformare le γ_m in modelli piani. Ex. fitta di travi si schiaccia carico fino a farlo agire su linea d'asse

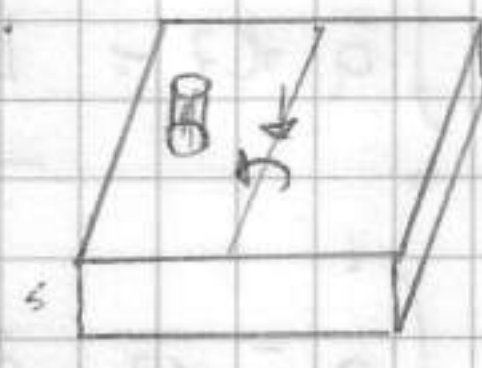


struttura. Se $\gamma_m \cdot S = \int_S \left[\frac{F}{L^2} \right] \rightarrow$ DENSITA' SUPERFICIALE DI CARICO



"Schiaccio m " $\rightarrow q_l = f_s \cdot a$
 \downarrow
 DENSITA' LINEICA
 [= LINEARE DI CARICO]
 $[F/L]$



Se in  c'è azione, la si considera la risultante applicata nel baricentro e TRASPORTATA sulla trave; si considera solo eff. piano la si applica alla dist. lineica [modellazione delle azioni]

Per sistemi discreti, $R = \sum_i F_i$ e $M_o = \sum_i x_{i0} F_i \rightarrow$ se queste generalizzazioni sono fatte \rightarrow a diventare distribuzioni CONTINUE

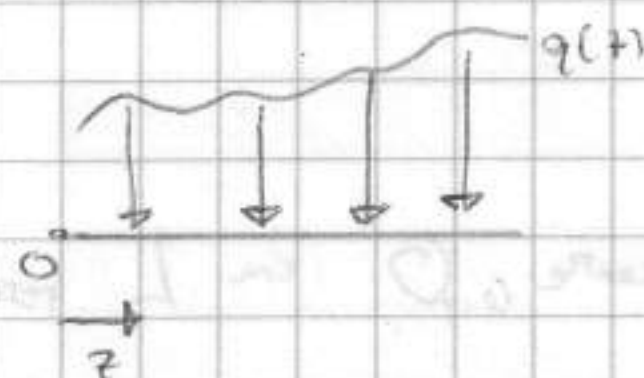
Potremmo vedere le f come una densità decrescente che al limite sta q_l



$f_s = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ \rightarrow f risultante in ΔA
 (ma \times dimensioni superficiali che lineiche di forza)

Se F_i lo considero piccolo $\rightarrow 0$ e x tra le forze

$q_l = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} \Rightarrow$ le sommatorie diventano integrali sulle funzioni che definiscono la DENSITA' di forza.



\rightarrow profilo della densità rispetto all'asse z . Distribuzione di forza rapp. da $f(z)$ [z : Posizione nella trave]

(15)

con valore \downarrow . Quindi: [a noi interessa sviluppo elastico travi]

$$R = \int_0^L q(z) dz$$

$$M_0 = \int_0^L z \cdot q(z) dz$$

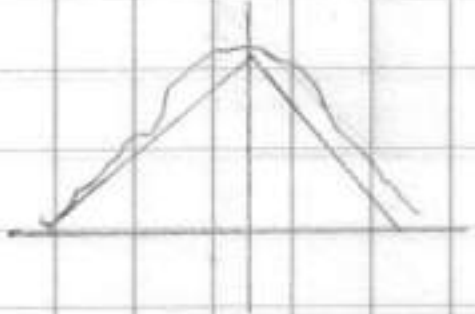
Se conosciamo $q(z)$ e posso integrare, posso definire

la pos. del baricentro di forte, quindi la (identica a sistemi elastici di forte).

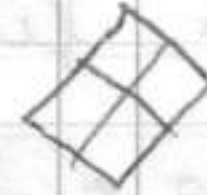
$$z_g = \frac{M_0}{R}$$

[distribuzioni carichi usate sono quella UNIFORME e TRIANGOLARE]

TRIANGOLARE: ex. materiale scelto in natura: 2 travi triangolari



- travi hanno comportamento a piastra



struttura

gli travi ~~non~~ identiche che lavora a pressione,

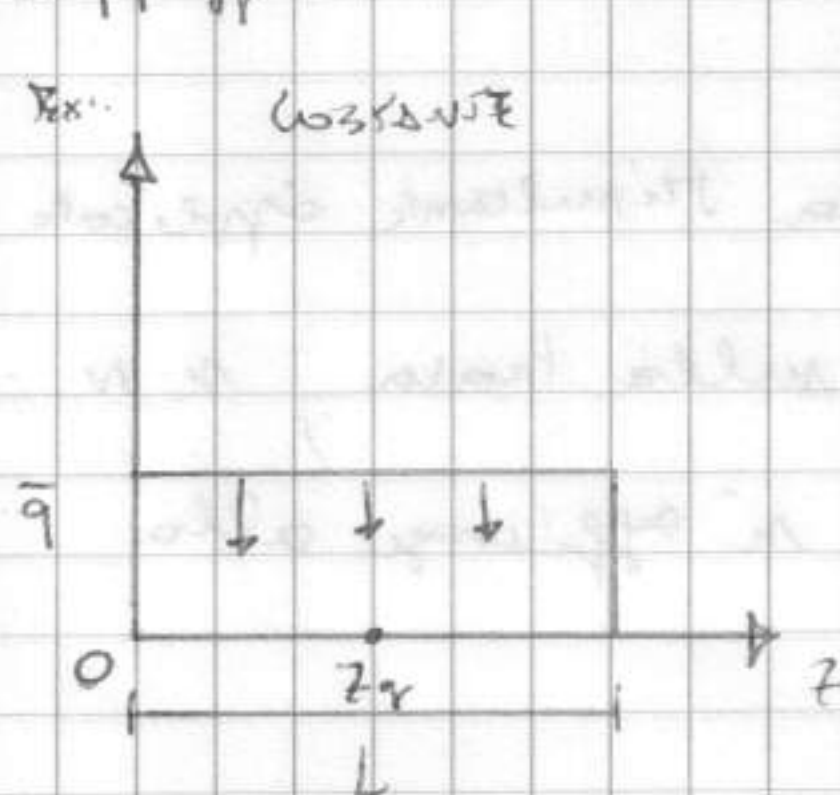
lavorano in 3D, non sono indipendenti; se cont. il carico tranne

a bordi esterni il comportamento è di travi \rightarrow ripartito



in maniera eguale in tutti. Oppure muretti posposti

appoggiati in travi

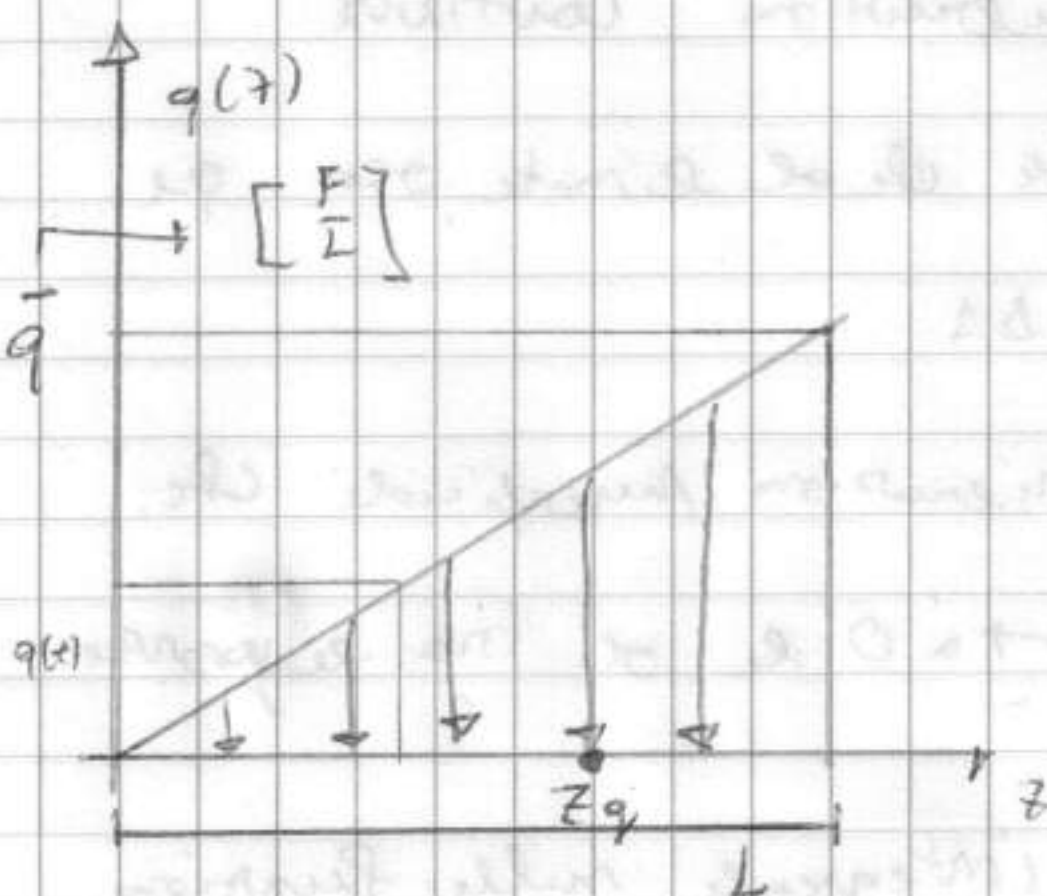


Quindi $q(z) = \bar{q}$ $R = \int_0^L \bar{q} dz = L \bar{q}$

$z_g = \frac{\bar{q} L^2}{2 \bar{q} L} = \frac{L}{2}$

$M_0 = \int_0^L z \bar{q} dz = \bar{q} \frac{L^2}{2}$

Ex: CARICO TRIANGOLARE



Se $\bar{q} = \frac{q(z)}{L}$ allora $q(z) = z \bar{q}$

Quindi $R = \int_0^L z \frac{\bar{q}}{L} dz = \frac{\bar{q}}{L} \frac{z^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\bar{q} L}{2}$

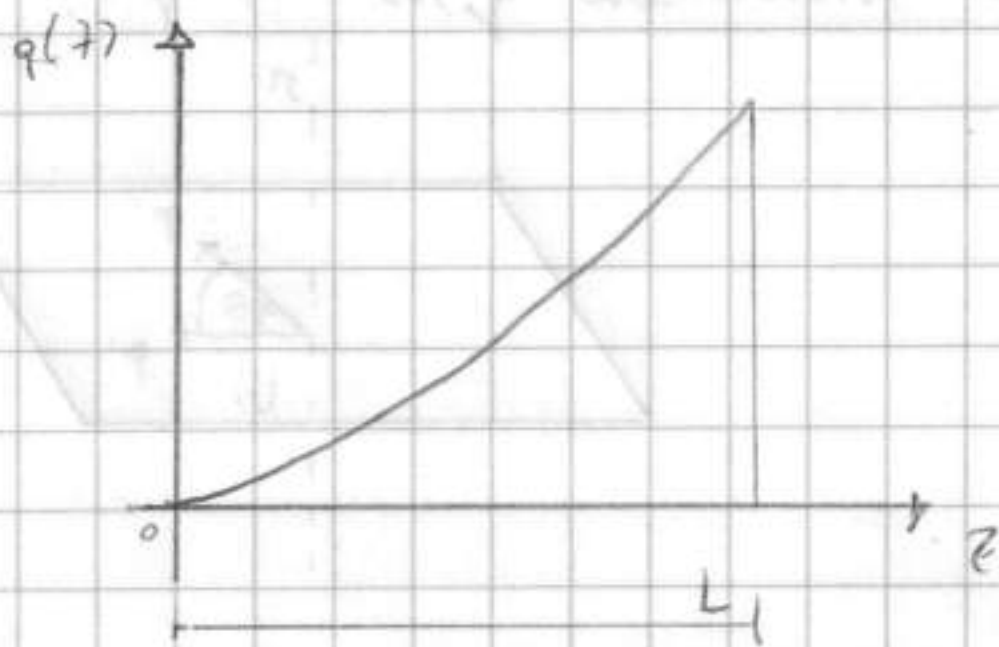
$M_0 = \int_0^L z \frac{\bar{q}}{L} z dz = \frac{\bar{q}}{L} \frac{z^3}{3} \Big|_0^L = \frac{\bar{q} L^2}{3}$

$z_g = \frac{\bar{q} L^2}{\frac{\bar{q} L}{2}} = \frac{2}{3} L$

(16) Il risultato "relativamente" non cambia; prova a fissare 0 in L però.

Si scrivono le eq. coerentemente al sistema fissato.

Esempio:

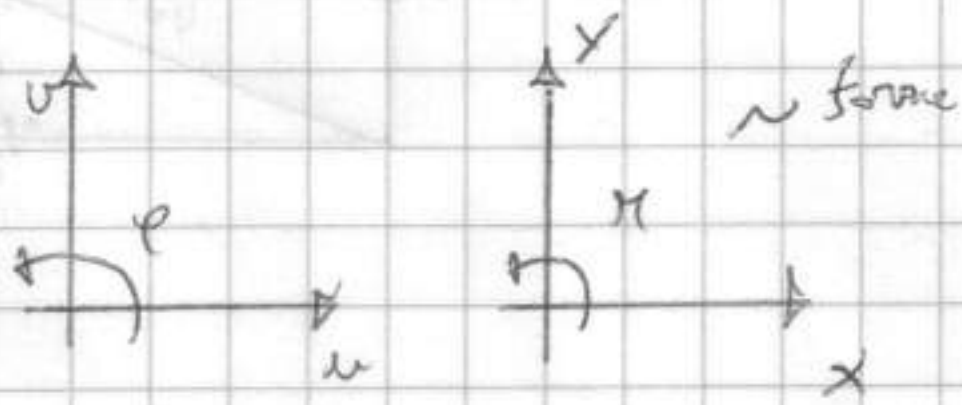


Calcolare le risultanti per una distribuzione

del tipo $q(z) = a z^2$

$$\vec{R} = \int_0^L a z^2 dz = \frac{aL^3}{3}; \quad \vec{M}_0 = \int_0^L z a z^2 dz = \frac{aL^4}{4}$$

In cinematica e statica si usano 2 mt. di riferimento locali.

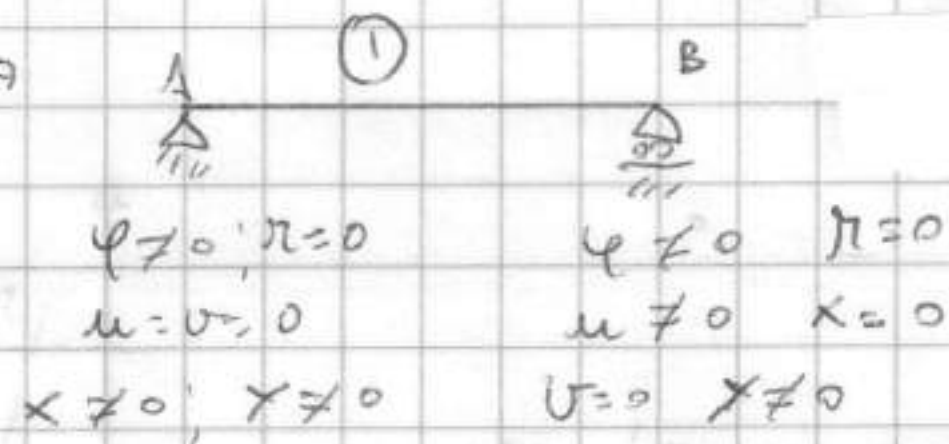


Quando momentaneamente libero, la reazione

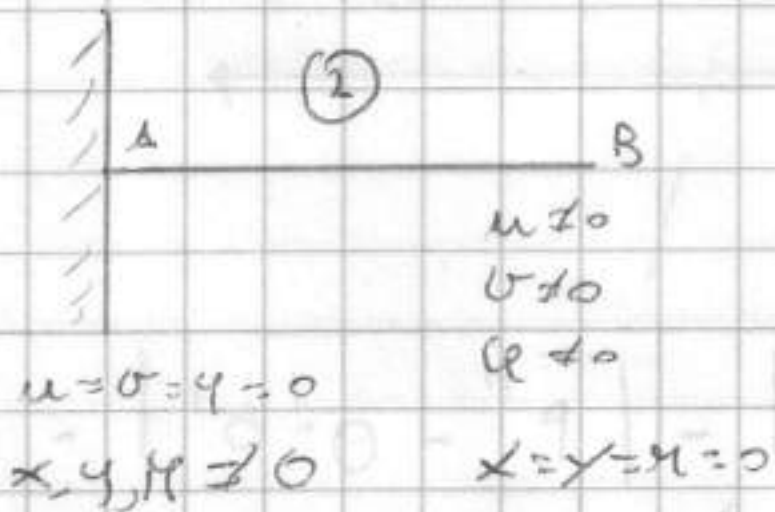
vincolare è SEMPRE NULLA [mont. vincoli

perfetti, senza attrito]

Ex. TRAVE APPOGGIATA



Ex. MENSOLE INCASSATA (problema piano)



Tutti gli spostamenti imposti e tutte e 3 le reazioni

vincolari possibili.

Ande un pts libero è considerato come un

"vincolo" in quanto è sfruttata come conoscenza

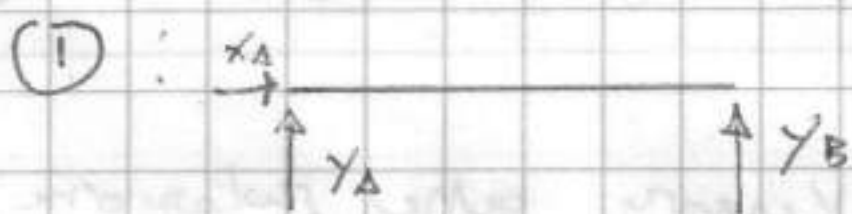
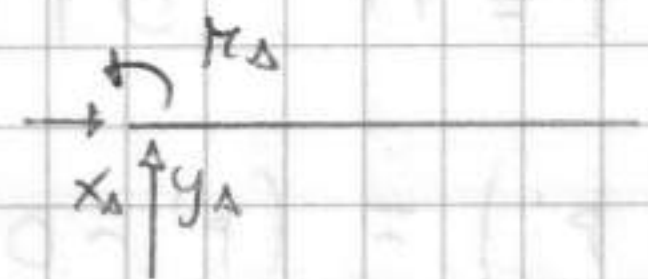
della possibile distribuzione delle forze.

Si utilizza lo SCHEMA DI CORPO LIBERO in EQUILIBRIO

non \equiv

(2): all'estremità struttura compaiono reazioni vincolari che

vincolo può fornire



[Verni arbitraria]



Può avere traslazione o

rotazione rigida

[CINEMATICA FINITA DEGLI SPOSTAMENTI DI UN CORPO RIGIDO]

Nella transl. rigida la distanza tra due p.ti non varia [i. equivalenti e int. rif. locale]. Tr. mantiene invariati i p.ti in int. locali traslati.

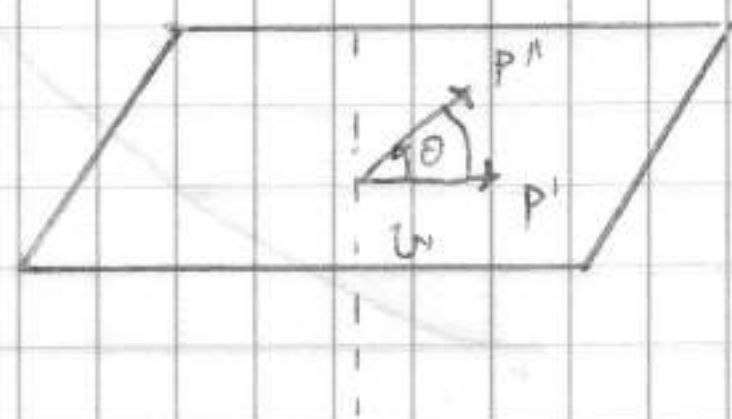
Una Rotazione θ del vettore \vec{r} rigida quando mantiene fissa i p.t.

di un'axe \perp al piano dove ruota il vettore.

Se π è costante. Nelle def. stesse alla

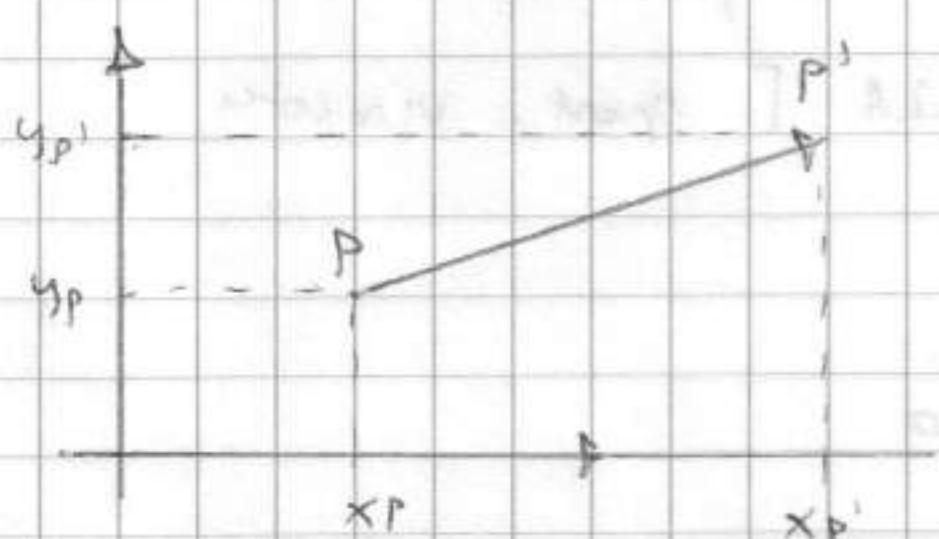
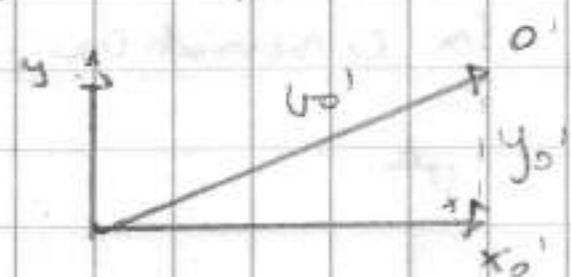
rotazione può capitare che gli assi di rotazione

delle rotazioni cambiano.



TRANSLAZIONE: (\forall p.ti di V_i la sua pos. traslata è data da $O' - O$)

$$\underline{U = (O' - O) = U_0} \text{ in generale.}$$



$$\begin{cases} x_{P'} - x_P = x_{O'} \\ y_{P'} - y_P = y_{O'} \end{cases}$$

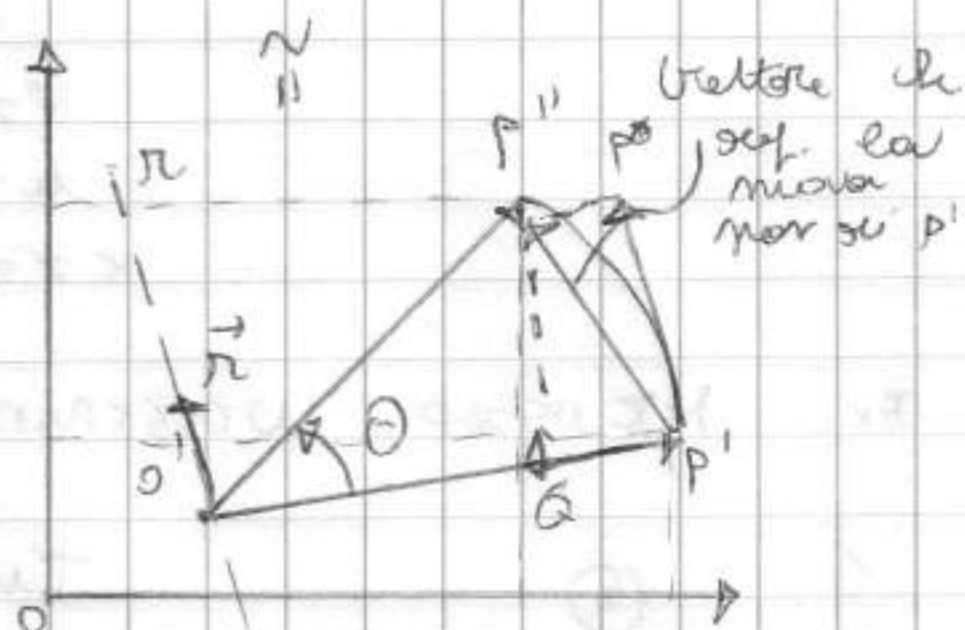
ROTATIONE

$\overline{OP'}$ ruota rispetto ad axe π fino in O' di

θ in senso antiorario e descrive vettore.

La componente normale P^* tan. a circonf. e

dir \perp che \exists a dir $\overline{OP'} - (QP')$.



$$(Q - P') \quad |O' - Q| = |P'' - O'| \cos \theta \quad \text{Quindi } |Q - P'| = |P' - O'| \cdot$$

$$|P'' - O'| \cos \theta, \text{ ma si ha } |P' - O'| = |P'' - O'| \quad \text{Quindi sostituendo}$$

$$|Q - P'| = |P' - O'| (1 - \cos \theta)$$

la comp. tan. alla circonf. che descrive il moto da P' a P'' è data da:

$$|P^* - P'| = |P'' - O'| \sin \theta = |P' - O'| \sin \theta$$

$$(P^* - P') = (P' - O') \sin \theta \quad \text{e} \quad (Q - P') = (P' - O') (\cos \theta - 1)$$

Se ho $u \times v = |u| |v| \sin \alpha$ e \vec{r} è vettore axe rotazione,

è anche rappresentativo di tutte le rette \perp a \vec{r} . Quindi posso trovare

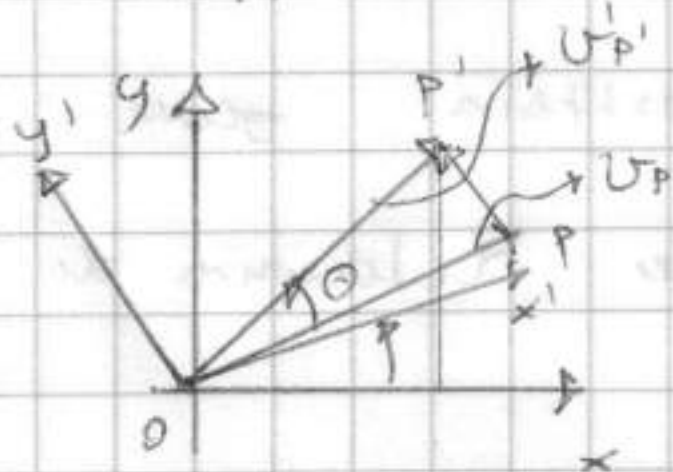
il velt. lungo la propria direzione. Quindi

$$(18) \quad (P^* - P') = (\vec{r} \times (P' - O')) \sin \theta$$



In generale $\underline{U} = \underline{U}_{o'} [\text{origine rif. locale}] + [\text{compr. // c.t. a vett. di ruota}] (\underline{P}' - \underline{o}') (\cos \theta - 1) + (\vec{n} \times (\underline{P}' - \underline{o}')) \sin \theta$

Rep. Vettoriale dello spostamento rigido

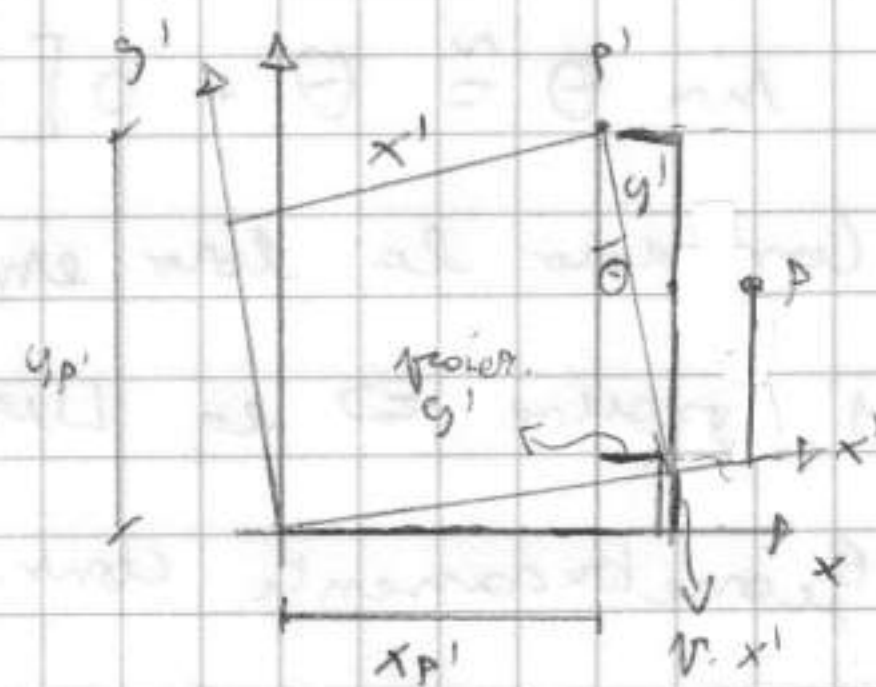


A rotat. \underline{U} penso equivalente rotazione del sistema di riferimento.

Devo fare proiezione x esprimere trans. di coordinate

Nel nuovo sist. P' ha stessa pos. di P nel vecchio

$$\begin{cases} x_{P'} = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y_{P'} = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases}$$



In forma compatta

$$\begin{Bmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}$$

[MATRICE DI ROTAZIONE]

\underline{U}_P e' vettore in $O(x, y)$, $\underline{U}_{P'}$ e' vettore in $O'(x', y')$. Se rotat. e' rigida i due vettori [visti ognuno nel proprio rif. loc.] sono COINCIDENTI:

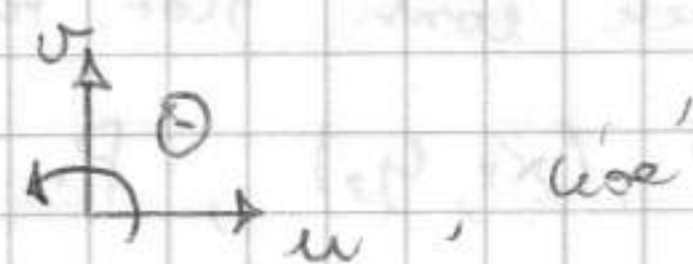
$$\underline{U}_P \equiv \underline{U}_{P'} \Rightarrow \text{applicando } Q \text{ a entrambi i sistemi } \boxed{Q \underline{U}_{P'} \equiv Q \underline{U}_P}$$

Q applicata a $\underline{U}_{P'} = \underline{U}_{P'}$ (cioe' al vettore che misura la pos. di P' nel vecchio sist. rif.). Q misura il vettore rotazione

$$(\underline{P}' - \underline{P}) = \underline{U}_{P'} - \underline{U}_P = Q \underline{U}_{P'} - \underline{U}_P = Q \underline{U}_P - \underline{U}_P = \underbrace{(Q - I)}_R \underline{U}_P$$

$$(\underline{P}' - \underline{P}) = R \underline{U}_P = \begin{bmatrix} \cos \theta - 1 & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P \\ y_P \end{Bmatrix}$$

Moto completamente descritto nel piano da



3 gradi di libertà o PARAMETRI LAURENCEAN

Se ho N corpi vincolati, il n. di gradi di libertà è $3N$

[importante x verificare una delle condizioni di compatibilità del sistema cioè il n. di incognite]

Nel calcolo delle strutture si usa la CINEMATICA LINEARIZZATA dove

si fa l'ipotesi di piccoli spostamenti. Con la serie di McLaurin si

ha e con si ha: $\left[\sum_i = \frac{\partial f}{\partial x} (x_0 - x_i) \right] + f(x_0)$

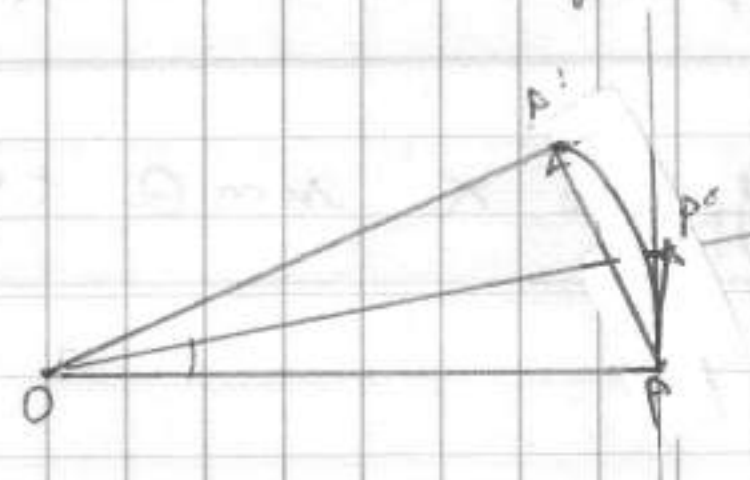
$$\sin \theta \approx \theta + o[\theta^2] \quad \text{e} \quad \cos \theta \approx 1 + o[\theta^2]$$

Considero la loro espansione a meno di termini del 2° ordine \Rightarrow mi fermo al

1° ordine \Rightarrow eq. LINEARI.

Geometricamente conr. angoli molto piccoli.

$$\text{Quindi } \vec{v} = \vec{v}_0 + \theta (\vec{n} \times (\vec{P}' - \vec{O}'))$$



Trascuro componenti in direzione OP . Quindi si appross. $P'P$ al vettore

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \quad \text{tangente in } P [\vec{P}' - \vec{P}]. \quad \text{Valido solo se } \theta$$

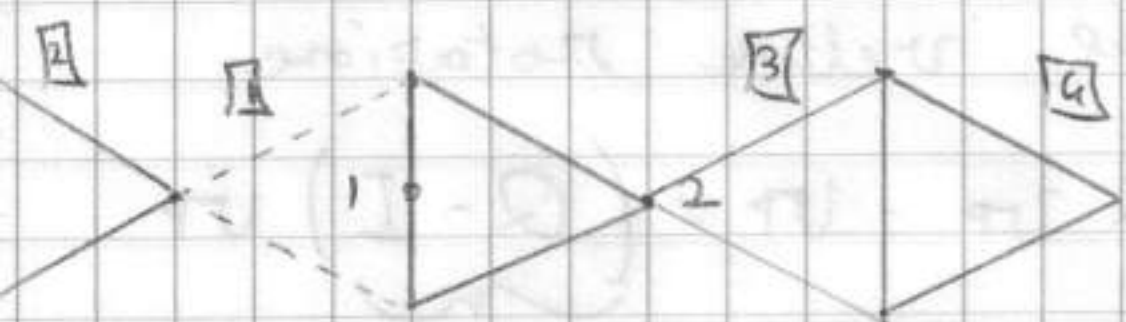
e' molto piccolo [spostamenti $\frac{1}{\infty}$ rispetto a
geom. della struttura, sono dim. relative].

[MATRICE DI ROTAZIONE DEI PICCOLI SPACAMENTI]

E' importante distinguere che c'è principio fondamentale.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

- Se ad es. con unico che ha 2 rot. Appliciamo $\theta_1 = 180^\circ$ antior. e
applico in sequenza $\theta_2 = 180^\circ$. (θ_1, θ_2).

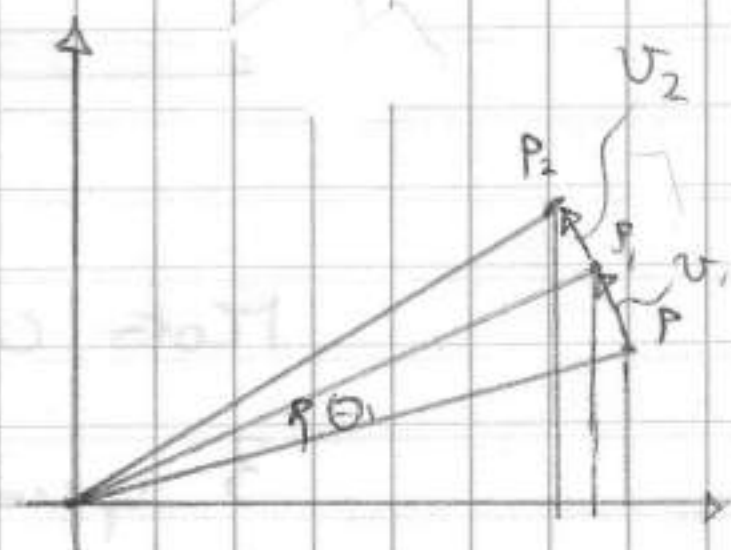


Applicando invece prima θ_2 ho B e poi θ_1 C. (θ_2, θ_1).

Otengo risultato diverso! Non posso sovrapporre, cioè riferirle sempre
allo stesso rinv. iniziale.

Se invece conr. rot. rigida $\frac{1}{\infty}$, ho θ_1 sia $P_0 \rightarrow P_1$.

Se $P = (x_P, y_P)$, P_1 (con R lineareizzata) = (x_{P1}, y_{P1})



$$\textcircled{20} \quad \begin{bmatrix} x_{P1} \\ y_{P1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_1 \\ \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_1 y_P \\ \theta_1 x_P \end{bmatrix}$$

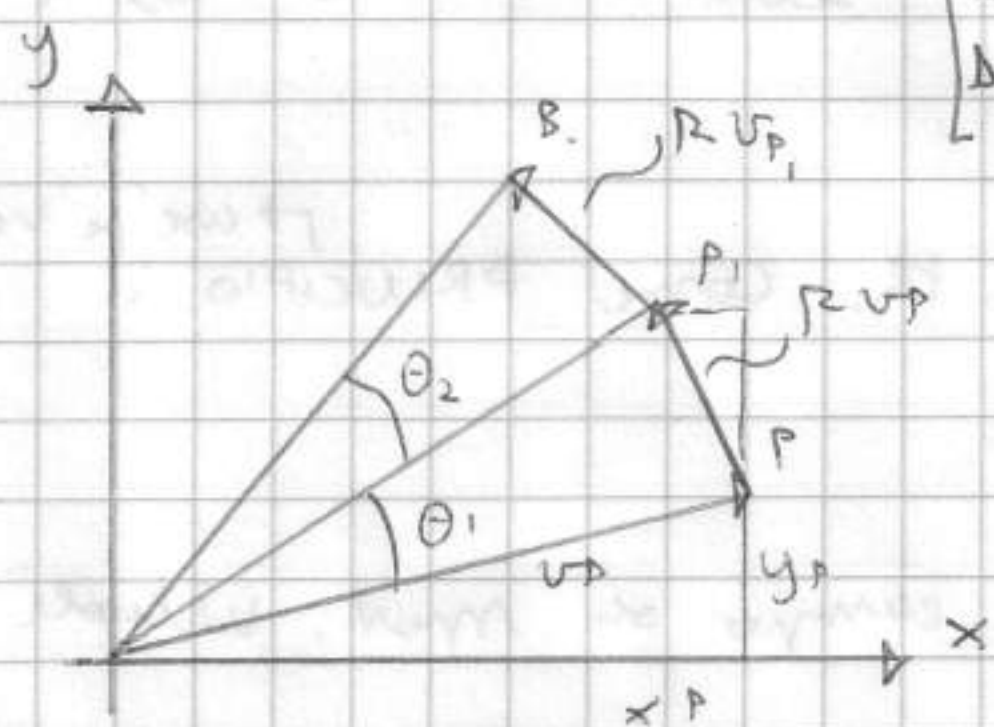
Quindi P' \rightarrow $\theta_1 y_P$, θ_2 applica nuova rotazione θ_2 ho $P_2 = (x_{P_2}, y_{P_2})$ e ottengo il vettore somma:

$$v_1 + v_2 = \vec{v} = \begin{cases} -\theta_1 y_P - \theta_2 (y_P + \Delta y_{P_1}) \\ \theta_1 x_P + \theta_2 (x_P + \Delta x_{P_1}) \end{cases}$$

$y_P + y_{P_1} \approx y_P$, $x_P + x_{P_1} \approx x_P$. Possiamo comporre la stat. θ_1 e θ_2 pensando gli riferimenti allo conf. iniziale del corpo in cui N ruotando PO , si ottiene

$$\begin{cases} -(\theta_1 + \theta_2) y_P \\ (\theta_1 + \theta_2) x_P \end{cases} \rightarrow \text{rotazioni si compongono linearmente e qui vale il principio}$$

Se ne risulta anche in statica. Se ho N cond. gli carichi posso ruotare simultati e comb. linearmente.



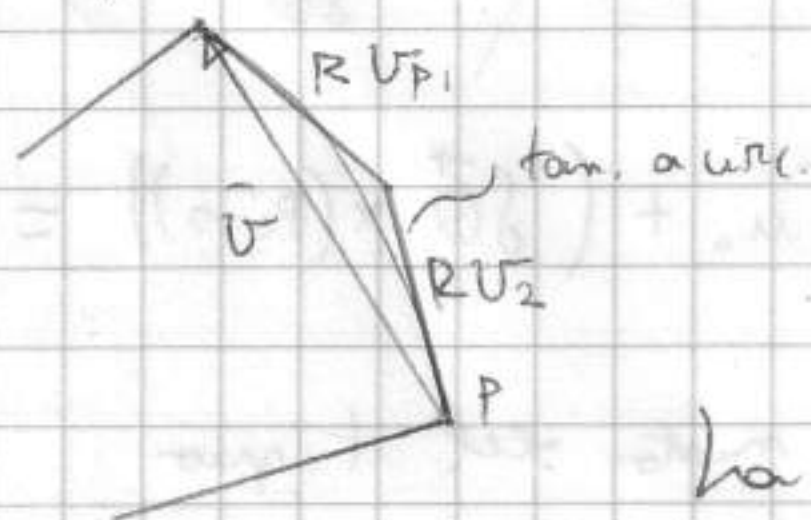
$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{bmatrix} + R v_P = \begin{bmatrix} -\theta_1 y_P \\ \theta_1 x_P \end{bmatrix}; R v_{P_1} = \begin{bmatrix} -\theta_2 y_{P_1} \\ \theta_2 x_{P_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\theta_2 (y_P + \Delta y_{P_1}) \\ \theta_2 (x_P + \Delta x_{P_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_2 y_P - \theta_2 \theta_1 x_P \\ \theta_2 x_P - \theta_2 \theta_1 y_P \end{bmatrix}$$

Se θ_1 e θ_2 sono $\ll \frac{1}{\infty}$, il loro prodotto è trascurabile (termini 2° ordine trascurati). Quindi

geometricamente:

$$R v_{P_1} + R v_{P_2} = \begin{bmatrix} -(\theta_1 + \theta_2) y_P \\ (\theta_1 + \theta_2) x_P \end{bmatrix}$$

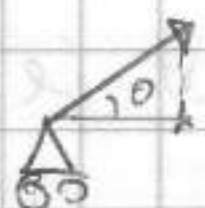


→ Sommando rot. registe infinitesime considero sempre vettori tangenti alla circonfer. (approx.)

la config. di riferimento è quella INIZIALE [non deformata e/o spostata]

TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI

Il lavoro è stato $\delta = F \cdot s$



→ unica componente è $F \cos \theta$ alt. ita

Per sistemi rigidi equilirati [sistemi dove valgono le eq. cardinali della statica: $\sum_i (f_i^a + f_i^v) = 0$; $\sum_i M_i = 0$] e per i quali è applicato un campo di spostamenti virtuali δu [campo / q. spostamenti sono $\frac{1}{2}$ ed è compatibile con i vincoli del sistema, a meno q. costretti vincolari imposti], il lavoro virtuale si esprime:

$$\text{II} \quad \delta \alpha = \sum_i (f_i^a + f_i^v) \delta u_i$$

[Se d'effetto forze MEM; in stesso sistema ci sono f e campi s)

$$\delta \alpha^a = 0$$

il lavoro virtuale delle f. attive DEVE essere nullo

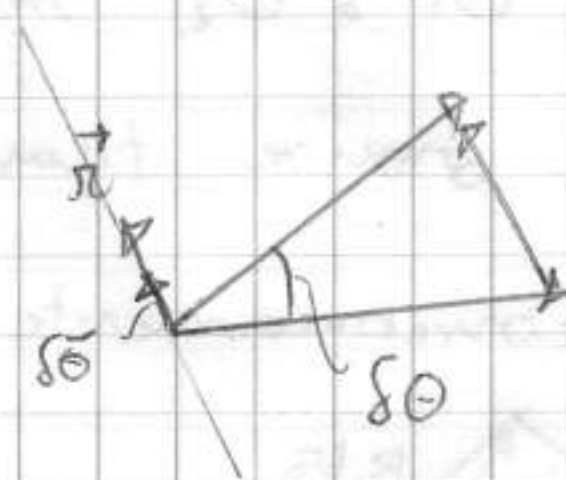
Dim. esplicitando II, si ha $\sum f_i^a \delta u_i + \sum_i f_i^v \delta u_i$ e tutte le [in sist. e perfetto e vincoli sono BILATERI \rightarrow limitati tutti q. spostamenti] forze reattive si esplicano in punti dove spostamenti è imposto. Se il sistema è equilirato $\sum f_i^a \delta u_i = 0$ e anche il lavoro totale \Rightarrow è nullo anche il lavoro delle forze attive.

Così non si può muovere. Se si assume il th. come PRINCIPIO: \rightarrow cioè è vero

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI [PLV]

Prendiamo sist. forze f_i [cont. f^a e f^v] e un campo di spost. virtuali δu .

Assume che $\delta u = \delta u_0 + \delta \theta$ lo esprimiamo come traslazione rigida + rot. rigida virtuale + $(\vec{\pi} \times (\underbrace{P_i - O}_{\text{centro di rotaz.}})) \delta \theta$ \rightarrow "quantità" ruota
generale r. applicazione f_i



Detto $\vec{\pi} \delta \theta = \delta \vec{\theta}$, proscolto con q. scalare

$$\delta u = \delta u_0 + (\delta \vec{\theta} \times (P_i - O)). \text{ Quindi } \delta \alpha = \sum_i f_i (\delta u_0 + (\delta \vec{\theta} \times (P_i - O))) =$$

$$= \sum_i f_i \delta u_0 + \sum_i f_i (\delta \vec{\theta} \times (P_i - O)). \text{ È un prodotto misto del tipo}$$

$v_1 (v_2 \times v_3)$ che è uguale a $v_2 (v_3 \times v_1)$; quindi si ha:

$$= \sum_i f_i \delta u_0 + \sum_i \delta \vec{\theta} \cdot ((P_i - O) \times f_i) = 0 \text{ per PLV. Quindi si ha}$$

② che $\forall \delta u$ (si ha che sono vere le eq. della statica) e vice PLV il

Struttura DEVE essere in equilibrio. 2 conseguenze:

- Per garantire l'eq. è importante non tanto la distrib. quanto la RISULTANTE delle forze. Quindi $F^a + F^r = 0$ e $M^a + M^r = 0$ [Voro x e f. esterne, non più x sollecitazioni interne]

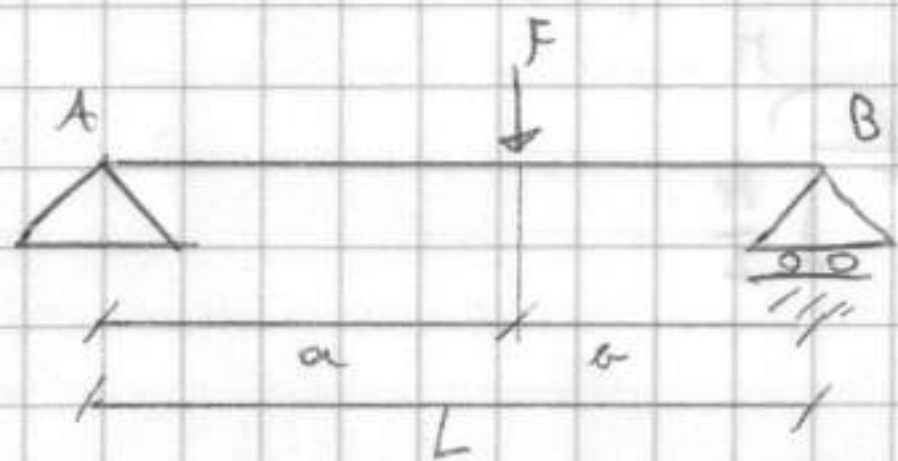
- Se PLV, delle forze valgono anche x sui dati da comp. lineare su <> su. Principio di sovrapposizione effetti valgono anche nell'equilibrio.

H

Es: Trave appoggiata e Mensola incastata. Molti int. piani sono scomponibili e riducibili a somma su questi due modelli. Es. il ponte istituito dalle travi sono appoggiate su pile [con giunti e appoggi]



Es: TRAVE APPOGGIATA



Si fanno tutte le f^a e si verificano le reazioni sui vincoli. Si fa equilibrio in schema su corpo libero.

$\sum F_x = 0$; $\sum F_y = 0$; $\sum M_a = 0$. Tante eq. x tanti gradi di libertà. \hookrightarrow eq. ind. e solo 1

Implichiamo: [fissiamo \uparrow in maniera

arbitraria con come i versi delle reazioni vincolari]

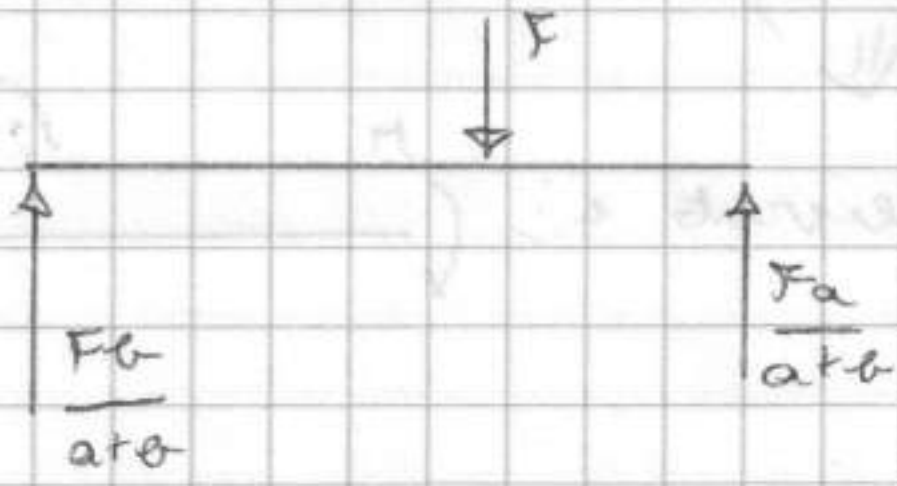
$$\begin{cases} X_A = 0 \\ y_A + y_B - F = 0 \\ -F \cdot a + y_B (a+b) = 0 \end{cases}$$

Dall'eq. di momento $y_B = \frac{Fa}{(a+b)}$ e

not. nella seconda eq:

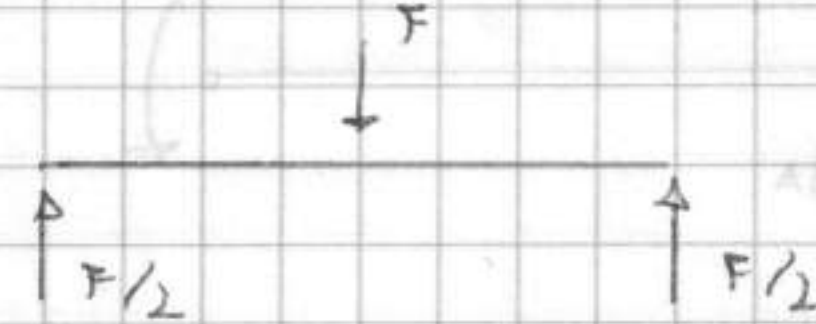
$$y_A + \frac{Fa}{(a+b)} - F = 0 \rightarrow \text{(moltiplico 2 e 3)} \text{ ho } y_A = \frac{Fb}{a+b}$$

ho schema EQUILIBRATO su corpo rigido e:



Se $a=b$ ho:

[carico centrato F si ripartisce equamente su appoggi]



Ex: Trave appoggiata con momento in B,



→ Schema di corpo libero: azioni applicate e possibili reazioni vincolari



Quindi

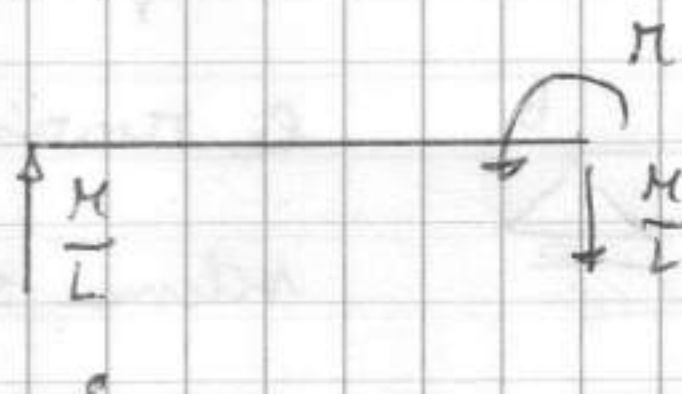
$$X_A = 0$$

$Y_A + Y_B = 0 \rightarrow$ Il corpo tende a ruotare : spinge su A e

→ ad appoggio B, quindi Y_A deve riportare M che vuole abbassarsi in alto, Y_B è opposto \rightarrow corpo non si deve muovere. Corpo agisce con coppia di forze di $|I| =$ e con braccio interno di equilibrio M :

$$M + Y_B L = 0. \text{ Quindi } Y_B = -\frac{M}{L} \text{ e } Y_A = -Y_B \Rightarrow Y_A = \frac{M}{L}$$

Il verso inizialmente posto è SCONFETTO, solo cambiando. Quindi schema di corpo libero equilibrato è



Ex: MENZOLA INCASTRATA

In A posso avere 3 componenti mentre in B nessuna



[Se applico F alla parte di menzola $(L-a)$ e scarica e non contribuisce all'equilibrio]



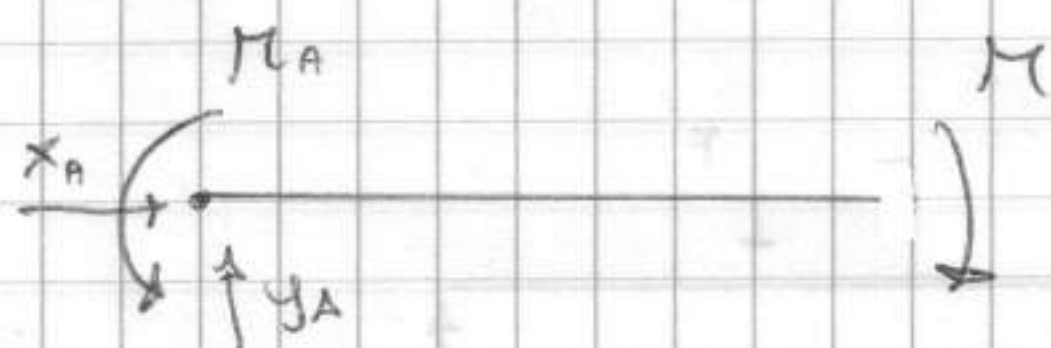
Quindi $X_A = 0$, $Y_A - F = 0$; $M_A - F \cdot L = 0$. Quindi $M_A = F \cdot L$ e $Y_A = F$

e lo schema di corpo libero equilibrato è:



[utile ripetere schema]

Ex: Menzola con mom. in B



$$X_A = 0; Y_A = 0; M_A = M$$

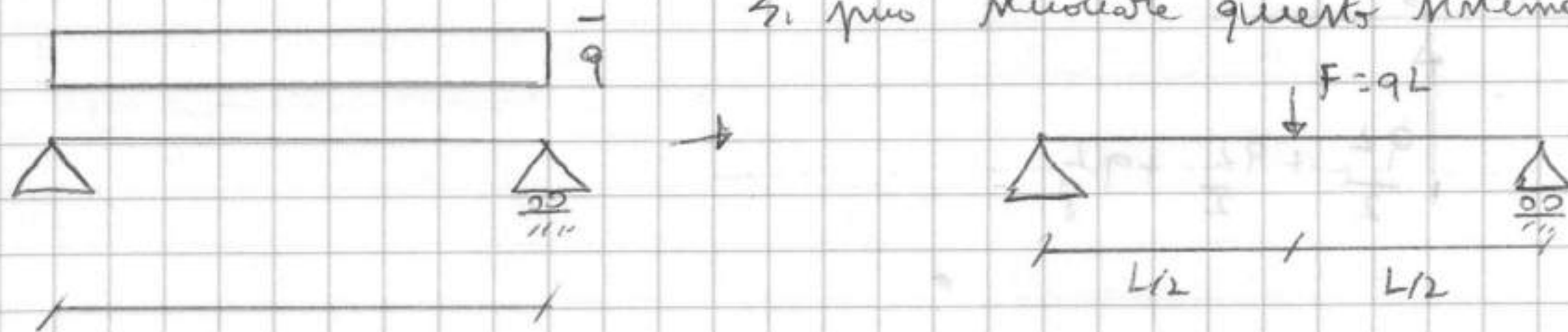
Schema equilibrato è:



Distribuzioni di carichi (in trave appoggiata)

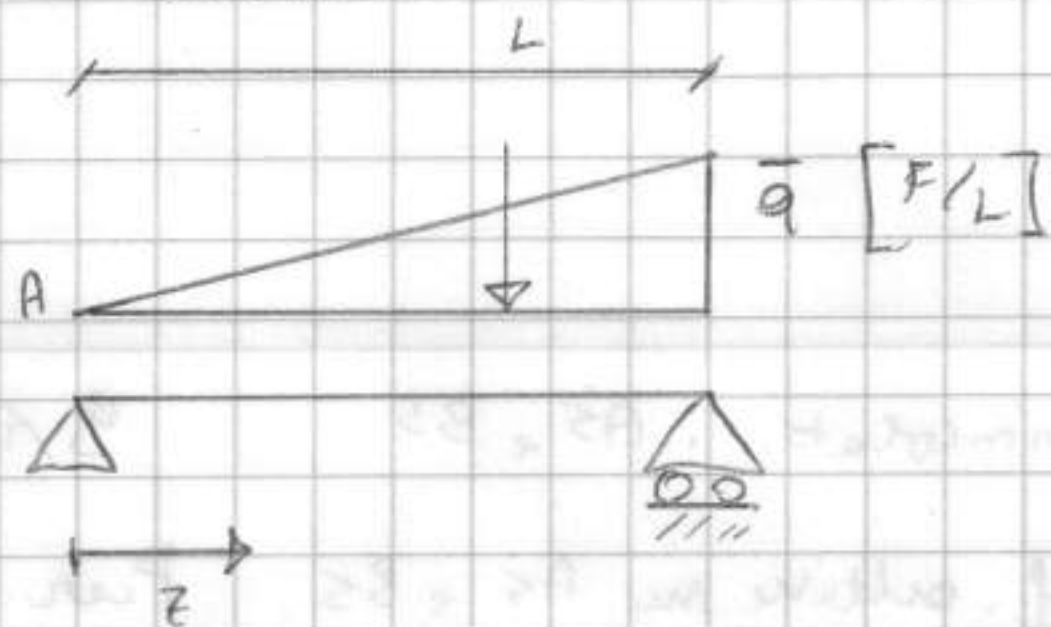
- COSTANTE

Si può studiare questo sistema!



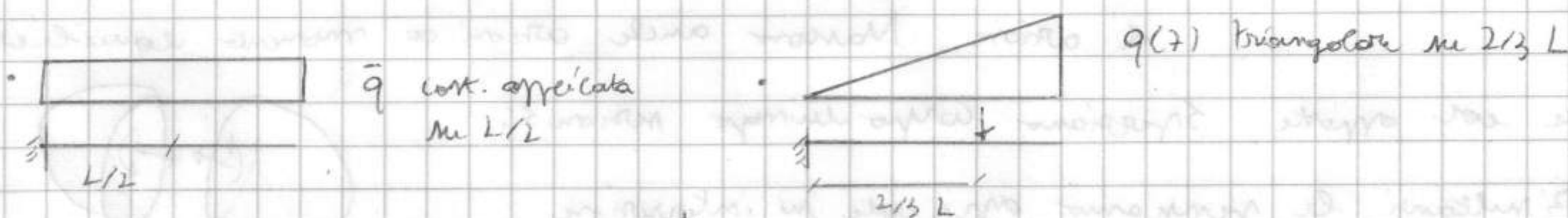
- TRIANGOLARE

Formando un int. sup. $q(z) = \frac{q}{L} z$



La $f.$ è applicata a $\frac{2}{3}L$ da A e agisce verso l'alto.

(in mensole incastrate)



Si può ragionare x sovrapp. effetti

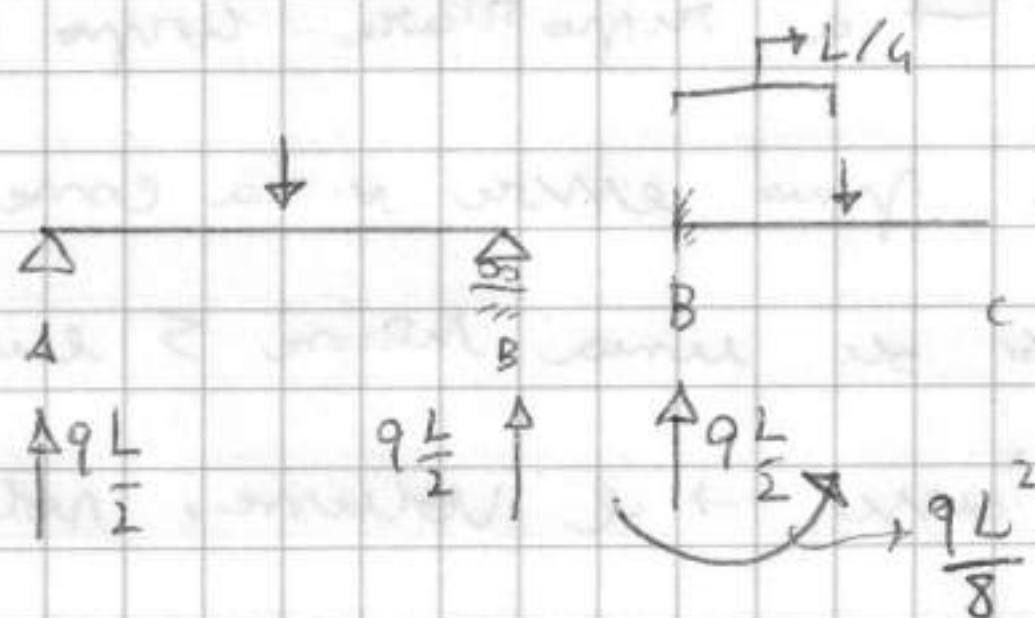


Si può vedere come trave appoggiata AB e mensole BC.

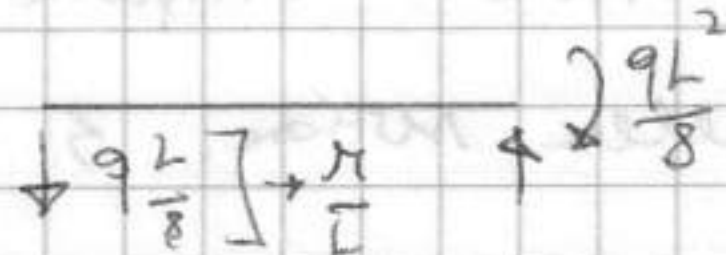
Applicando una distrib. unip. di carico su tutta l'AC si può

considerare le 2 distrib. distinte:

Per trovare le informazioni dello studiare questo sistema!

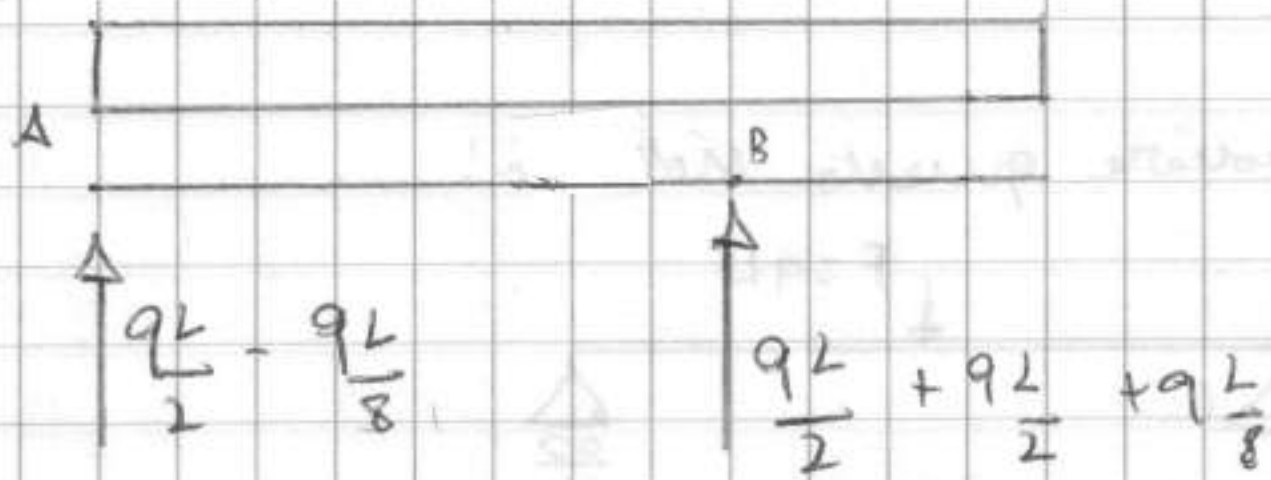


Si applica in B $\frac{qL}{2}$ ma opposta, meno x il momento. $\frac{qL}{2}$ non si trasmette nella struttura ma si scarica nel vincolo. $\frac{qL^2}{8}$ sta questo effetto.

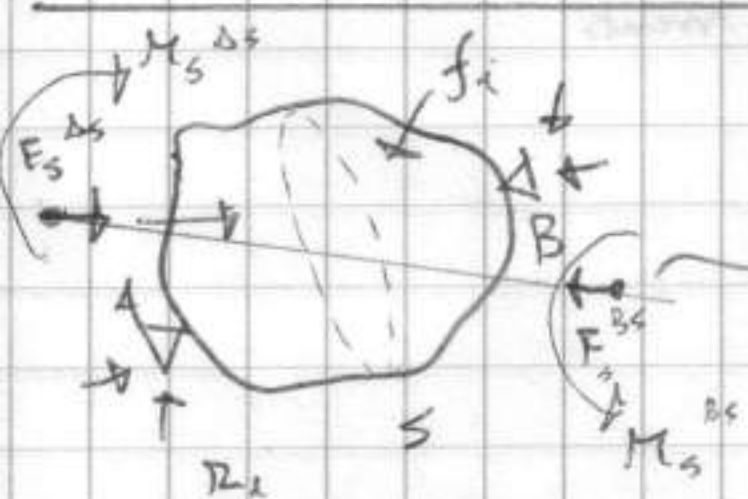
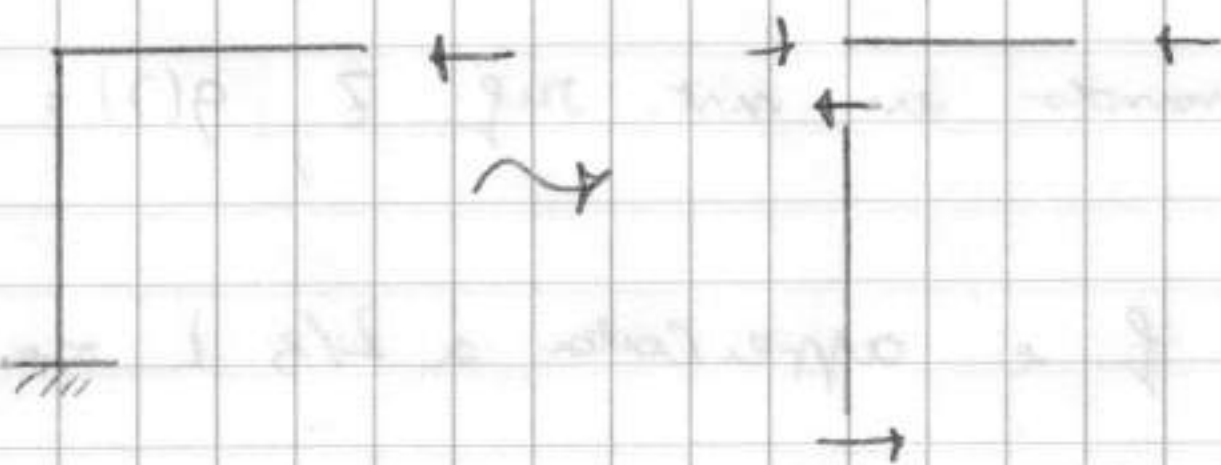


Quindi lo schema di equilibrio finale:

→ Ho normale tutti gli effetti



Es:



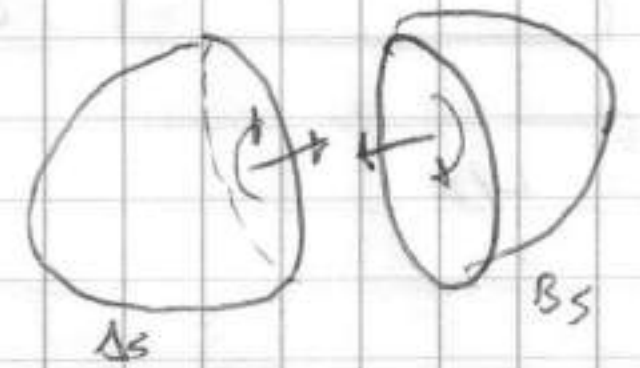
Sezione generica su corpo vincolato: AS e BS

9/1/06

Retta di azione risultanti f. attive su AS e BS. Per equilibrio F_s^{AS} e F_s^{BS} agiscono su stessa retta

d'azione. Ma sono anche azioni di momento equilibrate

le col opposte. Spostiamo corpo lungo sezione S:



Risultanti le portiamo applicate in intersezione

retta con S → Sono la risultante delle F che in

compariamo, due tratti: $F_s^{AS} = -F_s^{BS}$; $M_s^{AS} = -M_s^{BS}$ → sono le sollecitazioni

INTERNE (o sforzi interni o caratteristiche di sollecitazione). Se corpo si

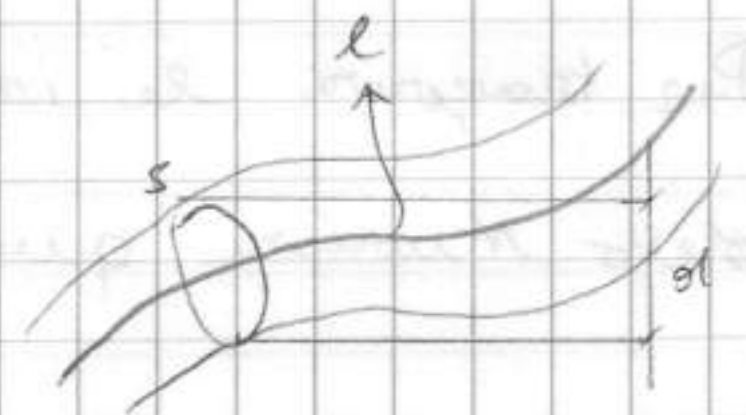
deforma sotto azione carichi e prova a maciarsi il corpo, azioni interne lo

mantengono → a riportare corpo in posizione inalterata.

La TRAVE può essere vista come solido PRISMATICO soggetto a

movimento di una sezione S lungo una

linea d'asse → il volume solido trave.



Se $d = 2r$, moltip. πr^2 e l = lunghezza, si

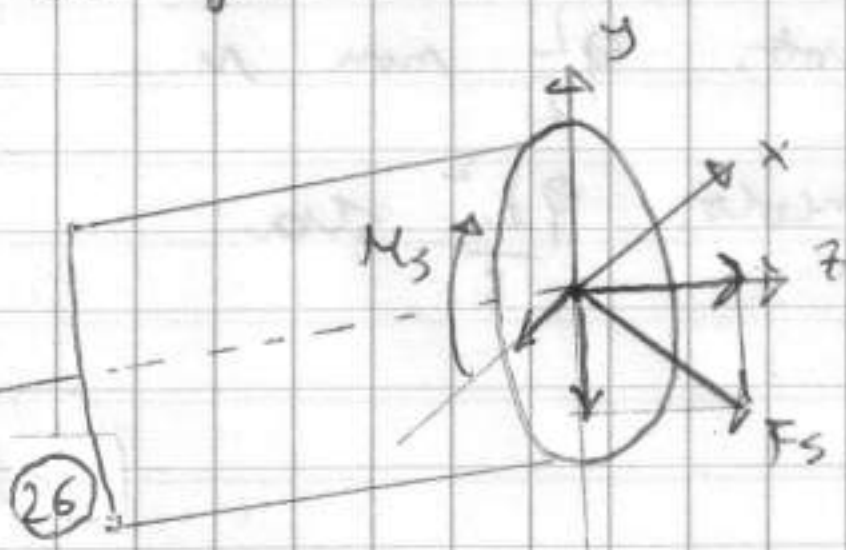
ha $l \gg d$. Nelle TRAVI SWEET d/e è molto piccolo [$d/e \approx 1/10$]

In genere nella trave definiamo un int. rif. locale (angolo

α , x α . [e' $\tan \alpha$]). Le sollecitazioni

possono essere scomposte lungo gli assi

locali della sezione. Si distinguono in:



Z) N : SFORZO ASSIALE [= NORMALE]

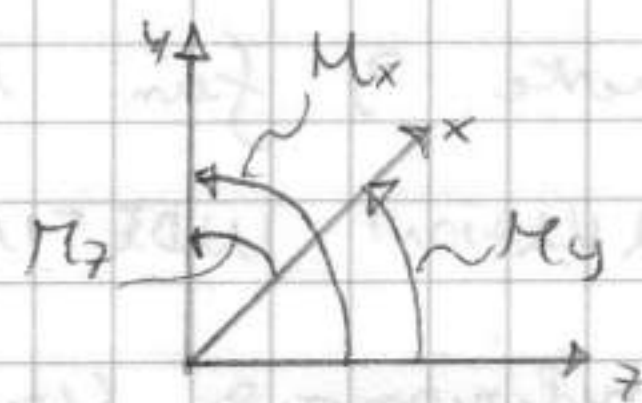
X,Y) T_x, T_y : SFORZI DI TAGLIO

Per le momenti, applicando sempre la scomposizione, si ha:

[componente indicata rispetto ad assi di rotazione]

X,Y) M_x, M_y : MOMENTI FLETTENTI

Z) M_z : MOMENTO TORCENTE



Motivo cinematico. Le azioni sono individuate pensando al loro effetto

cinematico in corpo. Se agisce solo N ci sarebbe una deform.

[1]

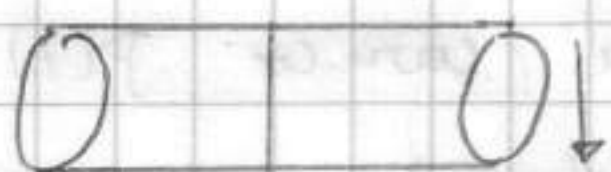


assiale, un allungamento della trave [1]

Se solo T_x, T_y , ci sarebbe azione di

scorrimiento. Se applico taglio in [1] parte

[2]



→ ad allontanarsi. Se applico uno dei

due M_x e M_y e applico un taglio [3]

[3]



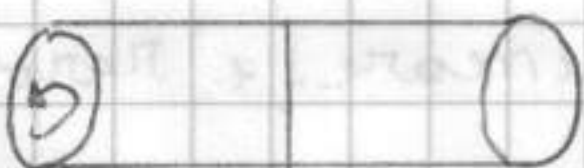
avrei flessione.

Se con M_z nel piano di S e giro

un taglio, e 2 mt. in corrispondenza

di S taglio → a ruotare [4]

[4]



Contr. totale nel piano Zy , x entra \perp al piano e scomponiamo

alcune azioni. Rimangono N, T_y e M_x

come sole sollecitazioni interne. Si

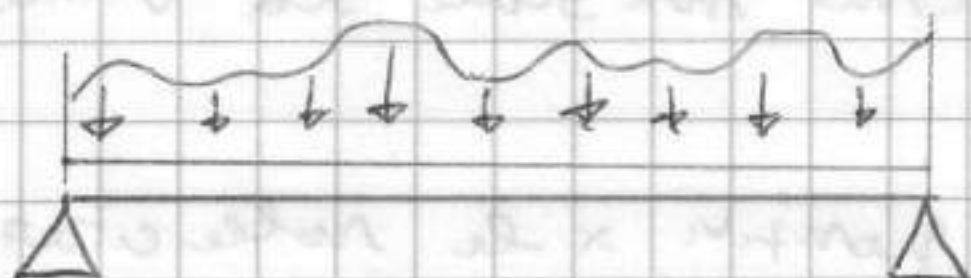
perce il comportamento 3D del corpo

[ad ex. il momento TORCENTE].

→ USO PIANO



Sembra indicare l'incisile $T_y = T$ e $M_x = M$. Trove con quattr. su



$q(z)$ [F/L]

carico qualsiasi. Carico

con risultante globale,

si trasmette ai vincoli esterni.

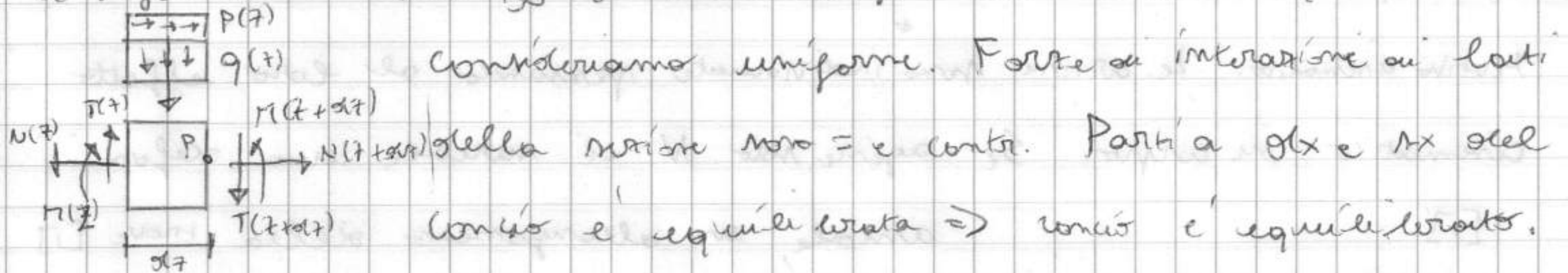
Carico e ASSORBITO dalla struttura, si si manifestano tramite i DISORDINI delle cariche di SOLLECITAZIONE e arrivo ai vincoli.

1) DIAGRAMMI di SOLLECITAZIONE sono derivati da $N(z)$, $T(z)$, $M(z)$.

Quindi 3 fun. si possono ricavare da cond. di equilibrio \rightarrow \rightarrow di BILANCIO

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO DELLA TRAVE

ci riferiamo a carico $\frac{1}{\infty}$ su trave lungo dz . Quindi $q(z)$ in dz lo



Considero int. forze interne equivalenti a 0. Incrementando la z

della trav. e' incrementa di $T, N, M. \rightarrow T(z) + dT, M(z) + dM, N(z) + dN.$

Considero anche la distribuzione ORIZZONTALE di carico, $P(z) \rightarrow$ uniforme in dz

\hookrightarrow 3 equilibri nelle varie direzioni: ($z =$ ORIZZ.)

$$- \sum Z = 0 \Rightarrow -N(z) + N(z) + dN + P(z) dz = 0 \rightarrow dN = -P(z) dz \Rightarrow \boxed{\frac{dN}{dz} = -P(z)}$$

Supponiamo che N varia solo in z , dN/dz e un coefficiente

rispetto a z , la vera variazione di N . Se carico e' uniforme nella

trave, $\frac{dN}{dz}$ e' costante e distribuzione di N e' lineare (e' raro che

accada, può accadere che $P(z) = 0$). Ciò vale solo per travi con

un rettilineo che x trovi al ASSICURATO e sono <> eq. di equil.

$$- \sum Y = 0 \Rightarrow T(z) - T(z) - dT - q(z) dz = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dT}{dz} = q(z)}$$

ovv. in $dz/2$

$$- \sum M = 0, \text{ rispetto a } P \text{ di sinistra} \Rightarrow M(z) + T(z) dz - M(z) - dM - q(z) \frac{dz^2}{2} = 0$$

$q(z) \frac{dz^2}{2}$ lo trascuro perché dz e' $\frac{1}{\infty}$ quindi dz^2 e' un $\frac{1}{\infty}$ di

ordine superiore agli altri elementi. $\Rightarrow \boxed{\frac{dM}{dz} = T(z)}$

Derivando ulteriormente e contr. la 2:


$$\text{eq. si ha } \boxed{\frac{d^2 M}{dz^2} = q(z)} \quad [\text{eq. a contorno non date da vincoli}]$$

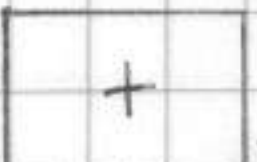
Si introduce una convenzione dei segni positivi x le sollecitazioni

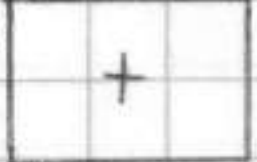
(28) interne; FISSA le norme dei DISORDINI MA non il verso delle FORZE,

che invece è definito da equilibrio, no. non finito.


↓

- N  → se N è su trazione sarà positivo

-  → se le due f. di taglio restano in senso orario, taglio sarà positivo.

-  → il diagramma del momento è disegnato

della parte terra del corpo. Momento e coppia su forze → in ↓, la parte terra del corpo è in basso. Quindi:

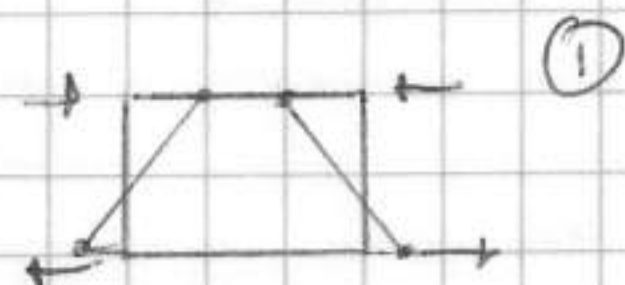
① 

 $M(z)$

 $N(z)$

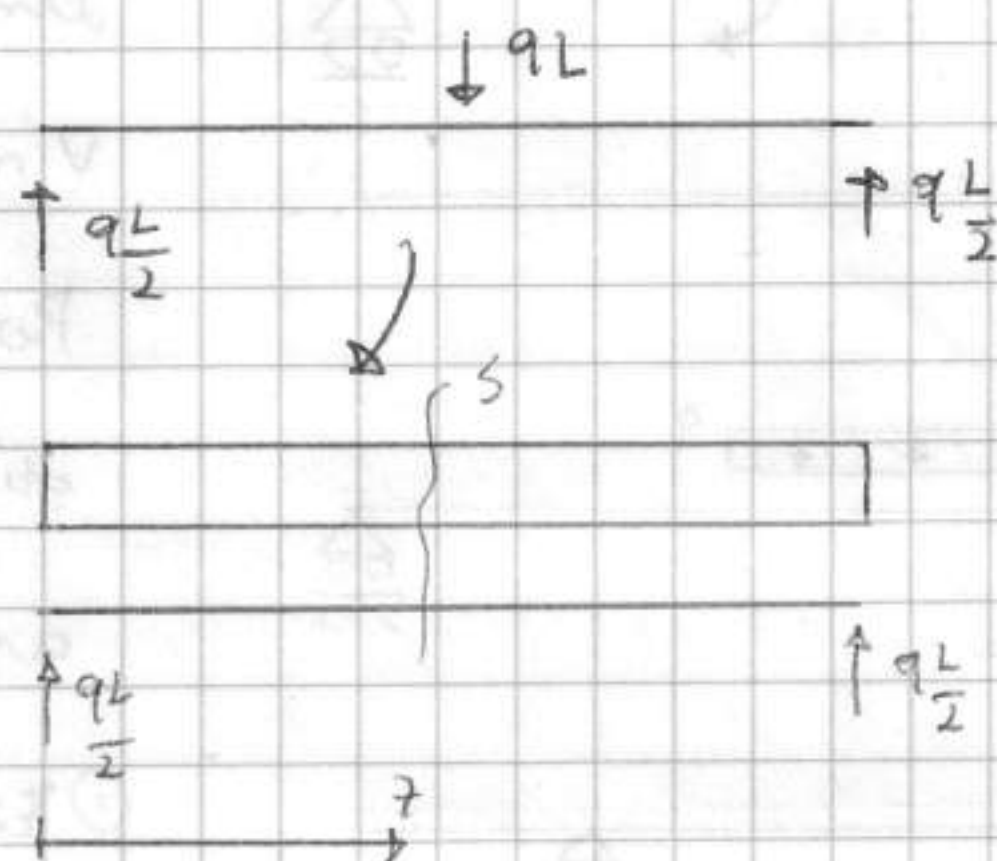
→ Infine mette il segno

Prima disegna la forza, poi i segni.

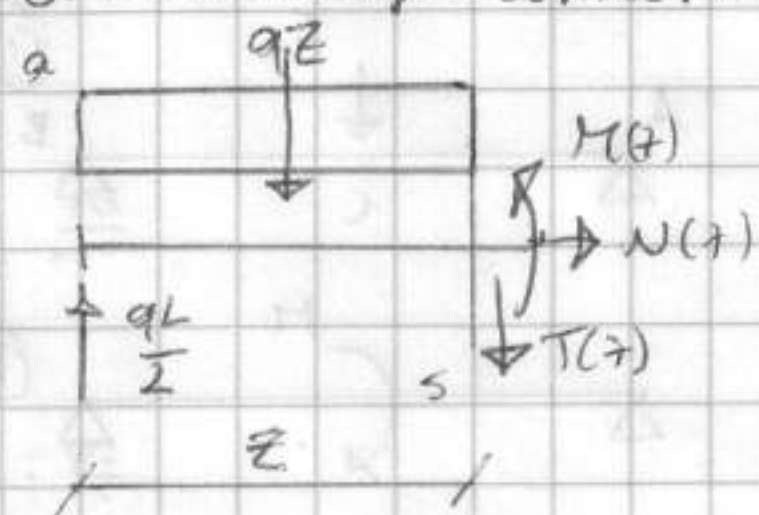


Es:

Schema su corpo libero:



Per tracciare il diagramma: sopra una generica sezione S ad ascissa z con origine in A ad ex. [scelto io, conviene agli estremi], si evidenzia il tratto di trave da equilibrare.



Sforzi disegnati con versi concordati alla faccia dx del cono di riferimento. Equazioni:

$$N(z) = 0, \quad q\frac{L}{2} - qz - T(z) = 0 \Rightarrow$$

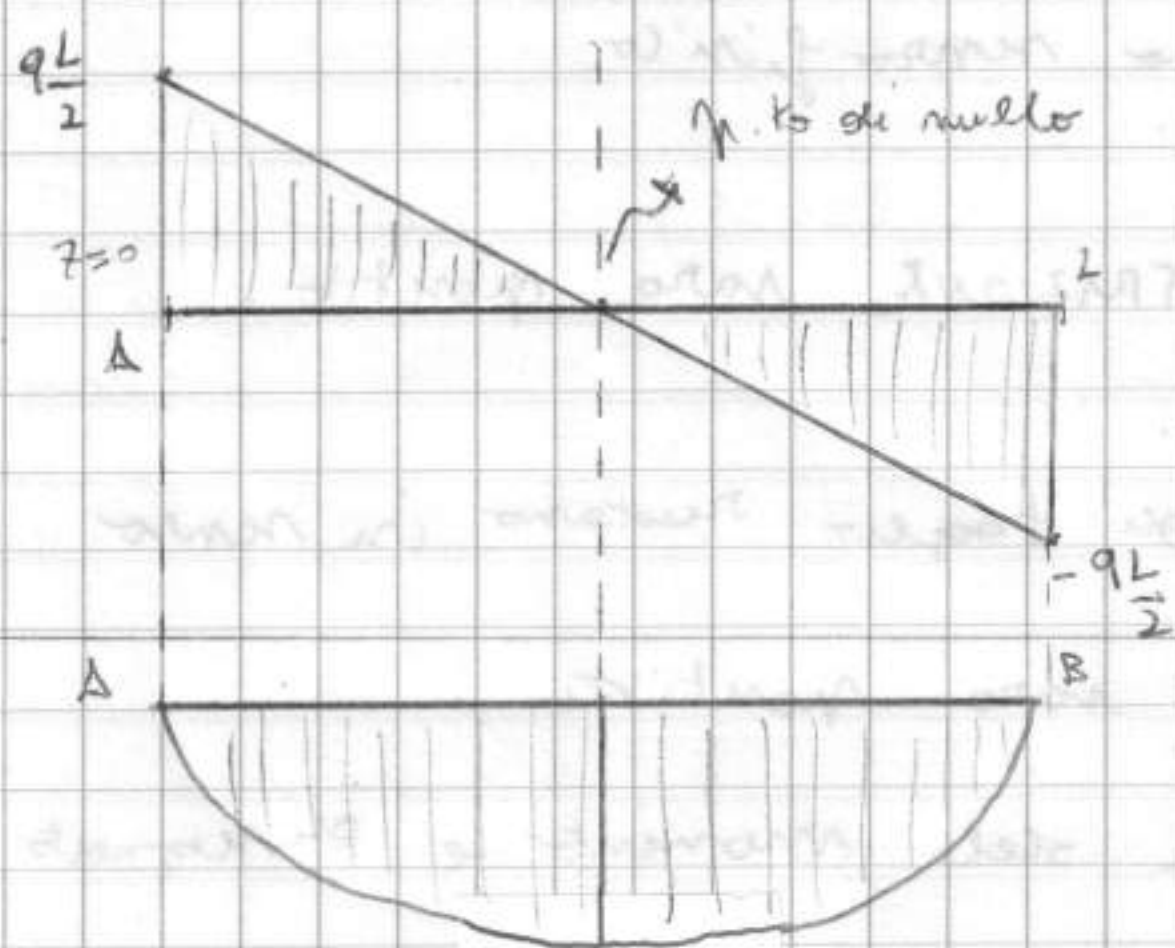
$$T(z) = \frac{qL}{2} - qz; \quad q\frac{L}{2}z - q\frac{z^2}{2} - M(z) = 0 \Rightarrow$$

$$M(z) = \frac{qL}{2}z - \frac{qz^2}{2}$$

Per diagrammare le sollecitazioni basta trovare le

10/1/06

funzioni (se sono rette, parabole, o max. min. cercarle).



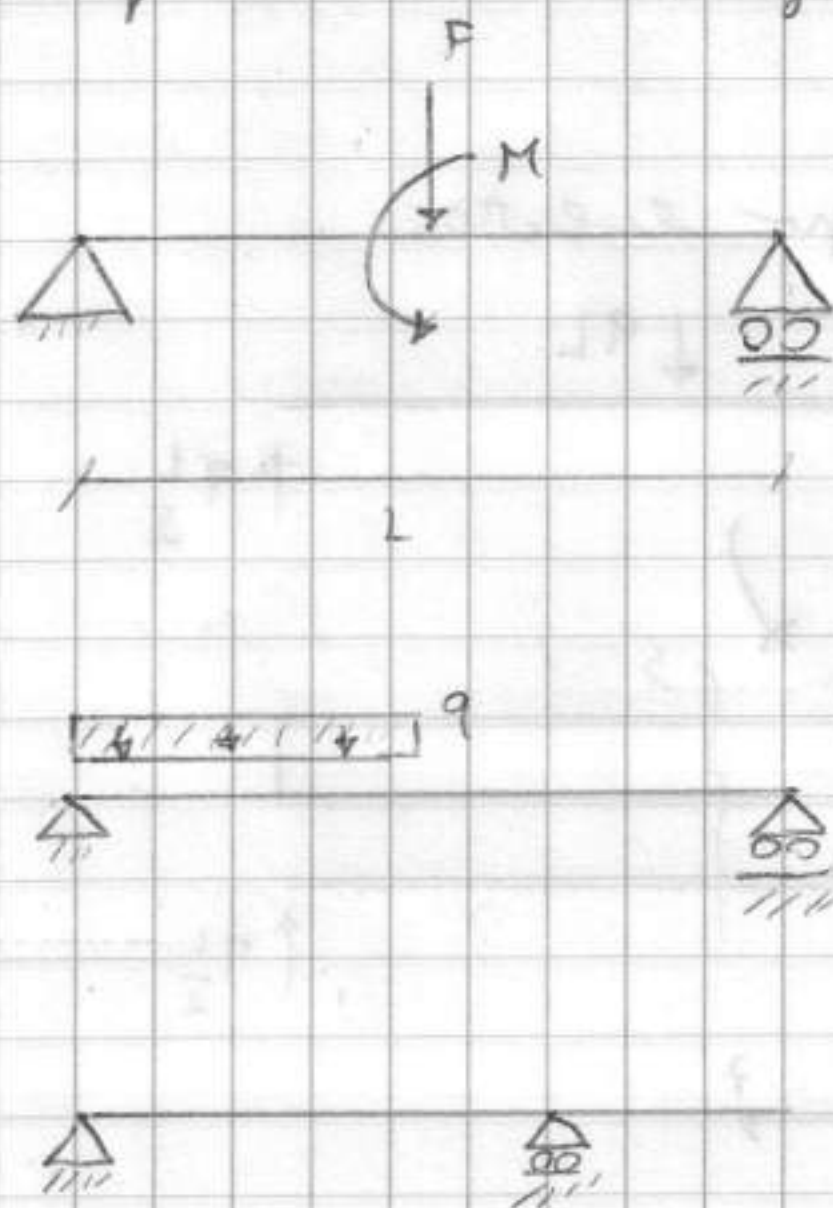
[ISG 10]

Caricatura di segno lungo la trave. In modulo
T uguale da A al centro

[Momento]

Si deve riconoscere parte terra. In A e B a
nono 2 connesse quindi $M=0$. Dato Mobile
concavità, studio tan. grazie a T. Parte terra
e in basso $[\frac{qL}{2} + \text{governa inizialmente, poi}$
niente effetto $\frac{qL^2}{2}]$

I diag. dei nodi in generale hanno "DISCONTINUITA", dovute ad applicazio-

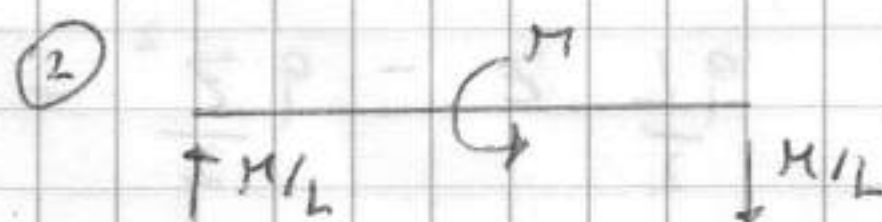
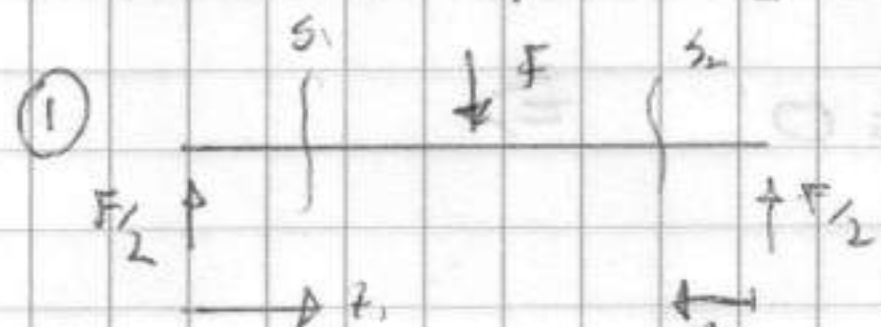


ne di forze concentrate, all'interruzione di
una cont. di carico, alla presenza di
vincoli interni all'asse della trave.

Per trave appoggiata carichi simmetrici generano
diagrammi simmetrici, e altri schemi no, d
anche la simmetria con vincoli.

① Ex: F. concentrate in metà trave, due con
t.a. con carico verticale e t.a. con M

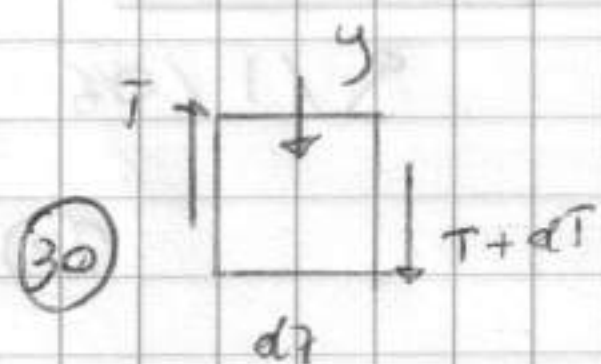
concentrate in metà trave. [R. vincolare rimangono
identiche anche se punto M concentrato lungo
asse trave, perché coppia rimane uguale, il
braccio è fisso.] Schemi su c. libero:



C'è DISC. nel diagramma. [Dim. cono elementare dT con y applicata

e facciamo l'equilibrio: $T - y - T - dT \Rightarrow y = dT$,


quantità finita $y = dT \rightarrow$ salto nel diagramma pari proprio a y]



Esempio in met.
un carico conc.,

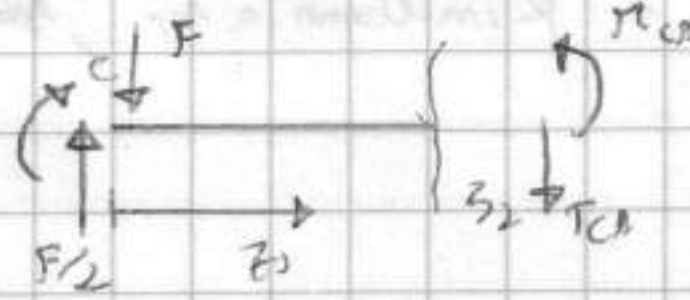
Ci mettiamo a discontinuata' paria a F e a $M \rightarrow$ due sezioni S_1 e S_2 e

fino a locale x scriviamo ma S_1 che S_2 . Equilibrio:

- S_1 :  $T_{dc} = F/2$; $F/2 z_1 - M_{dc} = 0 \rightarrow M_{dc} = \frac{F}{2} z_1$
 [coorte, T costante e M lineare, non ho carichi]

Valgono da A a C \rightarrow eq. globale e' definita a tratti.

Riparto da C: Su C devo riportare AC su C, cioe' gli effetti, le

 risultanti + ovviamente F conc. Ho taglio $F/2$ e un
 mom. $\frac{FL}{4}$ " " x il bracc. Devo imporre equilibrio

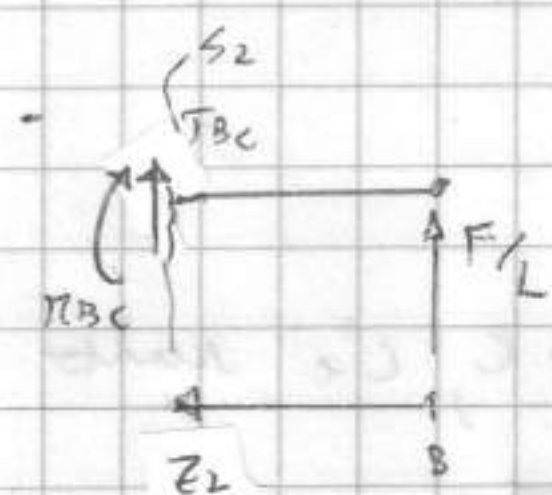
ripartendo da C. $F/2 - F - T_{CB} = 0 \Rightarrow T_{CB} = -F/2$; $\frac{FL}{4} - (F - \frac{F}{2}) z_1 -$

$M_{CB} = 0 \Rightarrow M_{CB} = \frac{FL}{4} - \frac{F}{2} z_1$

Ricapitolando:

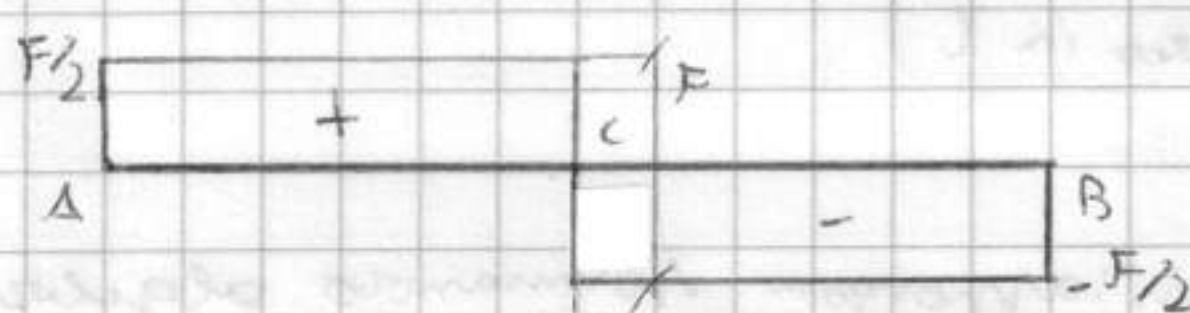
$$\begin{cases} T_{AC} = F/2 \\ M_{AC} = F/2 z_1 \\ z_1 = 0 \div \frac{L}{2} \\ [A] \end{cases} \quad \begin{cases} T_{CB} = -F/2 \\ M_{CB} = \frac{FL}{4} - \frac{F}{2} z_1 \\ z_1 = 0 \div \frac{L}{2} \\ [C] \end{cases}$$

Invece se si riparte da C
 e fare il trasporto sulle
 forze AC, posso con S_2
 con molto sist. z_2 che riparte
 da B [metodo equivalente]

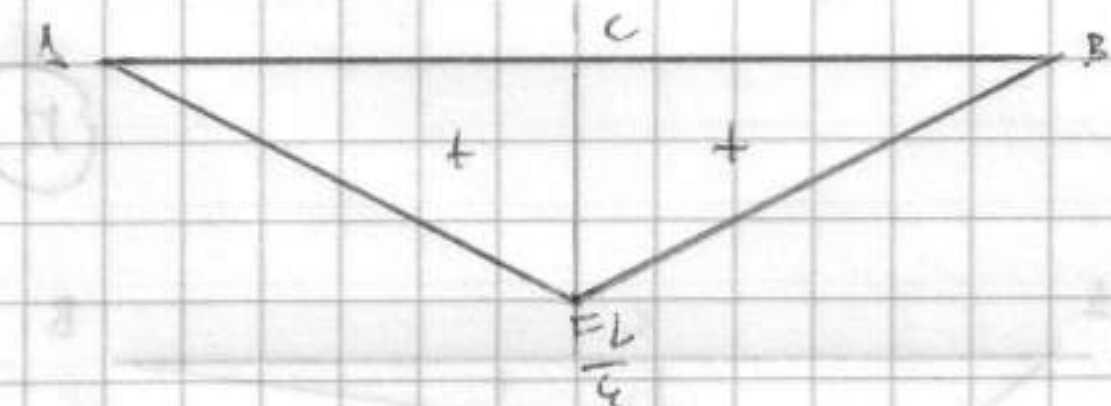


Premiamo $\uparrow \uparrow \square +$ Equilibrio: [eq. < > a corso
 del < > sist.
 rif ma non la
 stessa funt.]
 $F/2 + T_{BC} = 0 \Rightarrow T_{BC} = -F/2$
 $F/2 z_2 - M_{BC} = 0 \Rightarrow M_{BC} = F/2 z_2$

Tracciamo i diagrammi:

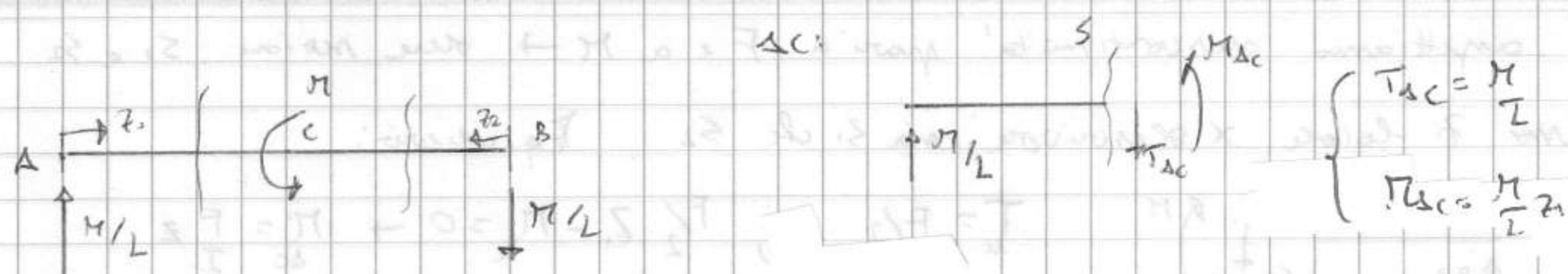


(T) - Salto in C che ha come modulo
 e' proprio F (vedi eq. concio elementare)

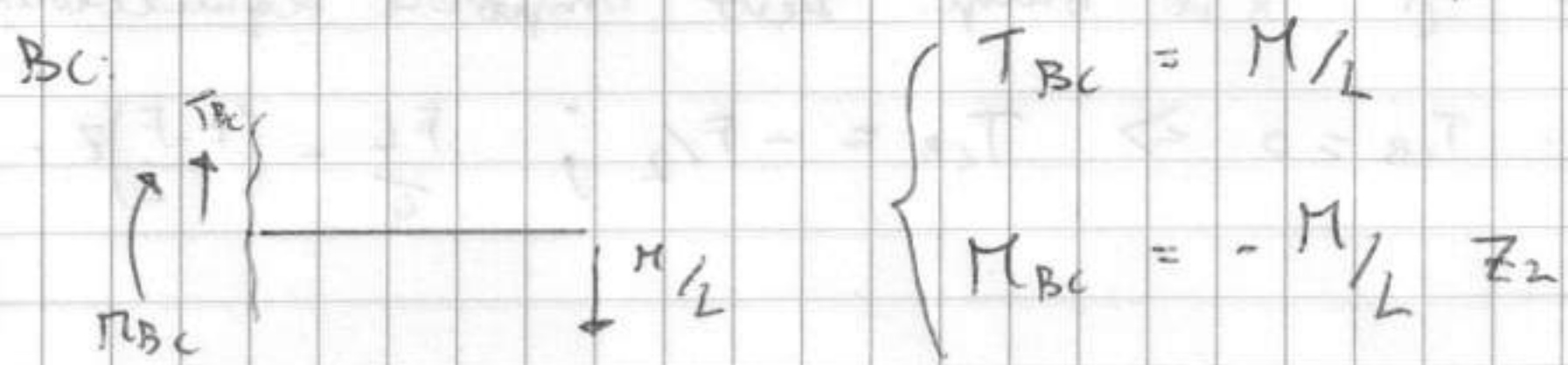


(M) - Parte tra in AC tiene parte impo-
 re, lo stesso nel secondo tratto.
 $M_A = M_B = 0$; $M_C = \frac{FL}{4}$

② M concentrato z_1 e z_2 in A e B, quindi eq. risp. a z_1 per
 AC e z_2 per BC.

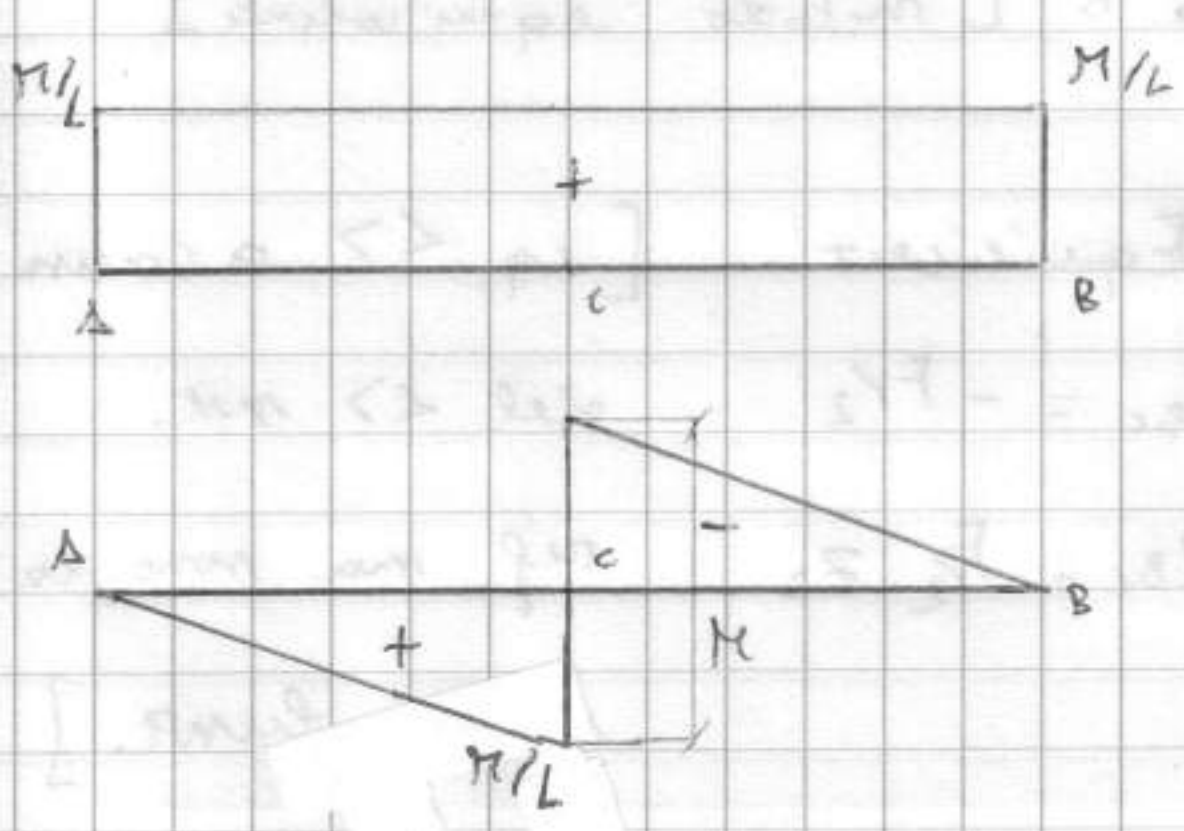


[In questo altro faccia la S: $\uparrow \uparrow$ (è focus eq. parte ax) e
 Volenti eq. di eq. in maniera equi., devo evidenziare risultanti a sx e
 vedere come si trasmettono a dx \rightarrow potrei scrivere $T_{Ac} =$ Risultanti a sx, sarebbe
 fare un'equivalenza tra sistema di forze]



[problema è solo simmetrico, qui T non cambia segno] Parte terra e
 sopra, eq. ai momenti in BC è \downarrow . Focus eq, vedo parte terra e
 alla fine tutto è segno

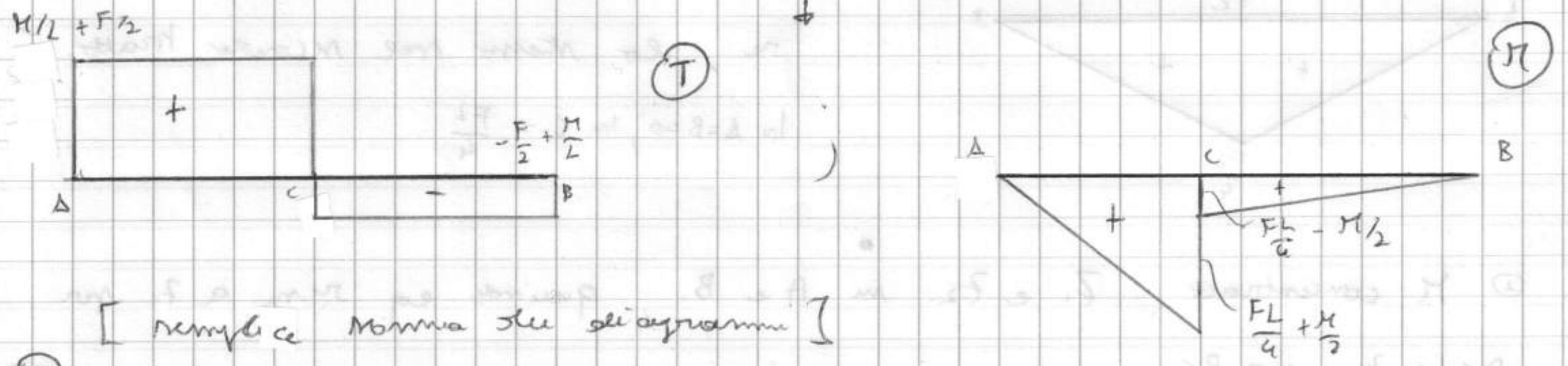
Tracciamo i diagrammi.



- ① - Non cambia mai segno
- ② - Diagramma si inverte in C, c'è salto che in 1/2 è proprio M

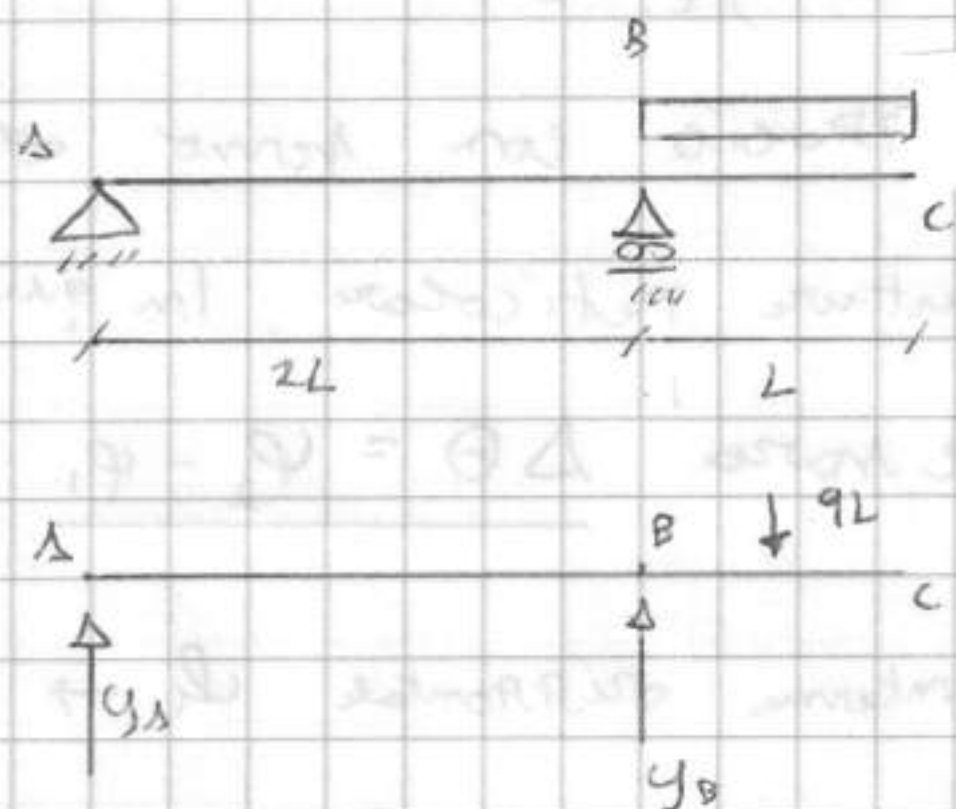
(usando F_1 e F_2 si deve verificare equilibrio in C)

Sovrapposizione effetti ① e ② \Rightarrow si sovrappongono sommando algebric.
 i due diagrammi. Supponiamo $F_1 > M/L$ e $F_2 > M/L$



[semplice somma dei diagrammi]

Ex:



[Tratto tra appoggi: CASATA, le

realtà SBA270]

Equil: $y_A + y_B - qL = 0$

$M_B) -y_A \cdot 2L - q \frac{L^2}{2} = 0 \Rightarrow$

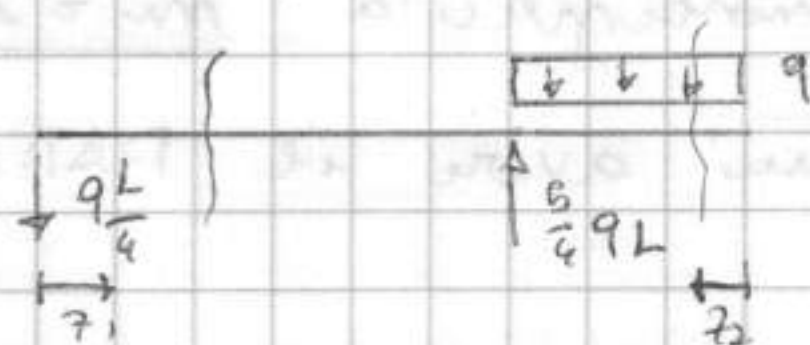
$y_A = -\frac{qL}{2} \rightarrow$ devo cancellare verso nello schema qui c.i.

$y_B = \frac{5}{4} qL \rightarrow$ verso corretto

\Rightarrow Schema di corpo libero EQUILIBRATO

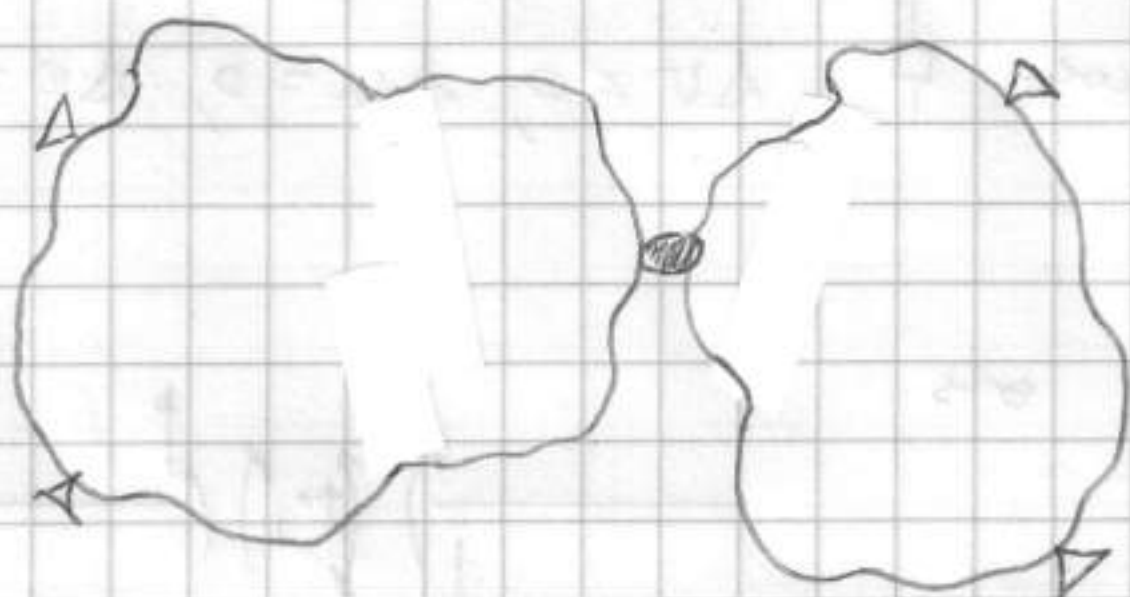
Operiamo 2 MA. la prima = AB, la seconda CB. In B devo trovare un

valore in \odot e lo troverò alla fine dei calcoli.



SISTEMI ARTICOLATI DI CORPI RIGIDI

12/1/06



Corpi vincolati a Terra. Analisi vincoli reciproci tra corpi [sotto VINCOLO INTERNO]

Ex: trave rettilinea piana \rightarrow la sposta:

ho 3 parametri spostamenti, 2 traslazioni

ed una rotazione. Entero spost. rigido, tratto il sist. rig nel

pts di rottura. [non posso generalità se numero spost. se B

rispetto ad A]. Numero in B rispetto ad A 3 SPOSTAMENTI RELATIVI

$$(u_B - u_A) = \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta \theta \end{pmatrix}$$

Rispetto vin. interno tale da bloccare / vincolare

tutti gli spostamenti tra loro [VINCOLO DI CONTINUITÀ]

o lascio qualche grado di libertà. INCASTRO INTERNO

$\rightarrow \Delta u = \Delta v = \Delta \theta = 0$. Ora faccio i poteri nodali.

Incasso interno

\rightarrow possono scambiarsi (T, N, M), cioè $y \neq 0, z \neq 0,$

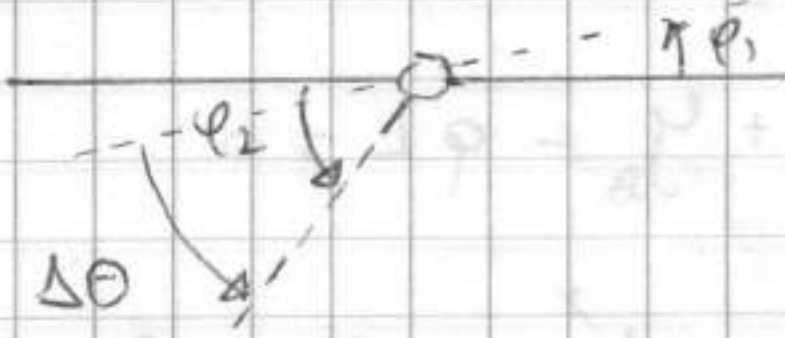
$M \neq 0$. \rightarrow no "T, N, M" che le posso come

Reazioni tra corpi con vincolo da me idealizzato.

Un altro vincolo interno, oltre all'inc. interno, è la CERNIERA INTERNA.

È vincolo traslabile con grado di ex.

Si trova in strutture reticolari. In questo caso $\Delta\theta \neq 0$ e vale $\Delta\theta = \varphi_2 - \varphi_1$.



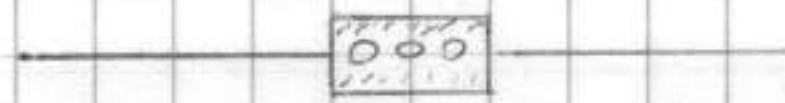
Non posso allontanare i corpi, c'è reatt. interna orizzontale che \rightarrow a riportare in equilibrio. Si ha una



$z \neq 0, y \neq 0, r = 0$ e si ha $\Delta u = \Delta v = 0$.

ha molteplicità $m = 2$ [x e' inc. int. $m = 3$]

Si può avere il PATTINO INTERNO: 2 elementi appoggiati l'uno sopra all'altro e scorrono [ex. corsia a



trave appoggiata]. Qui $\Delta\theta = 0$ e non

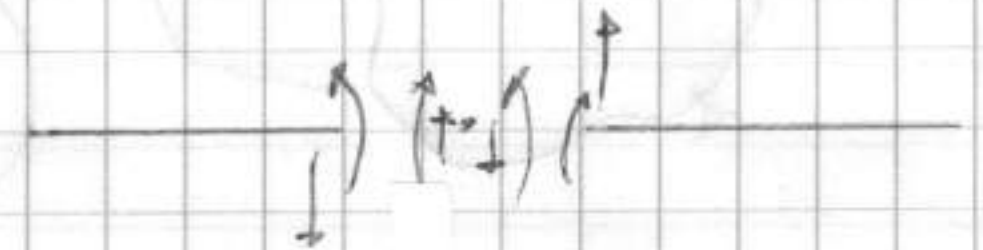
permette movimenti nella dir. \perp al pannello. In questo caso

$\Delta v = 0$ e $\Delta u \neq 0$. [si era in verticale ∇ : $\Delta v \neq 0, \Delta u = 0, \Delta\theta = 0$]

\rightarrow è vincolo DIREZIONALE.

Staticamente, si hanno i corpi c'è reatt. su

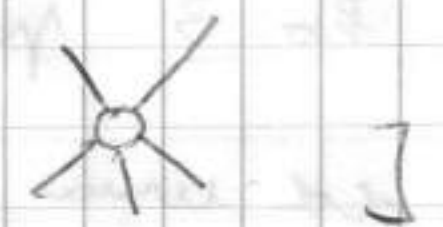
momenti, r. vert. $\rightarrow r \neq 0, y \neq 0, z = 0$.



$m = 2$.

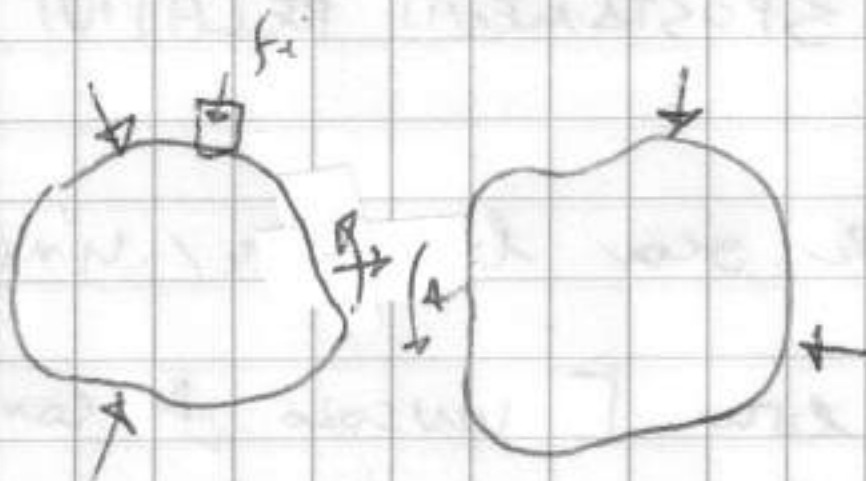
[nella cerniera interna possono convergere n aste,

quindi la sua $m = 2(n-1)$



Caso nel cui si ha n. reatt. esterne e interne che sistemi sono ISOSTATICI

e vincoli ben distribuiti. (ex.



$N = 6$ e di

isostatici ma n. non è equilibrato)

È QUIRIBRIO globale: quello dell'intero corpo con in evidenza le

R. vincolari esterne \rightarrow le eq di equilibrio hanno solo compon. dell.

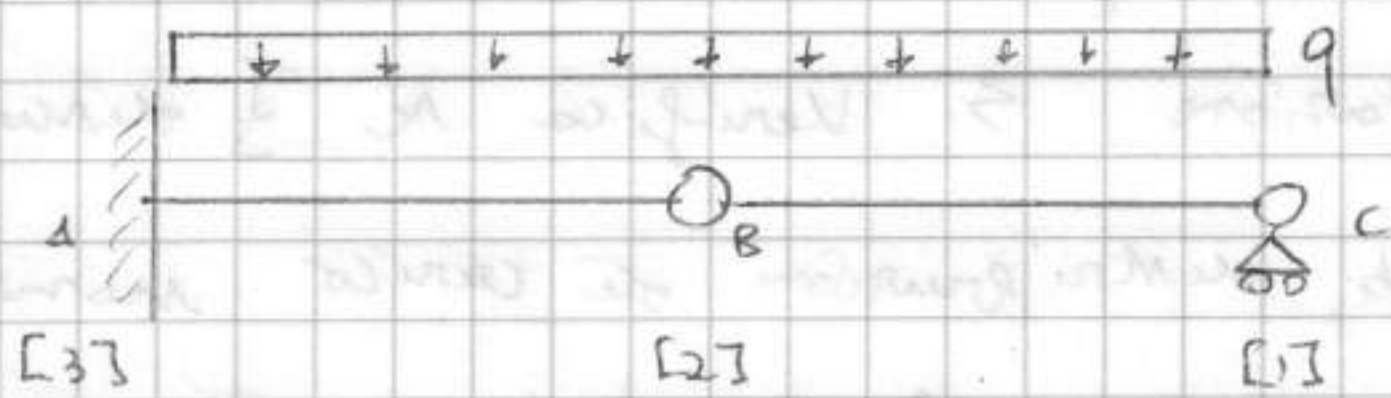
R. v. int.

36. Posso mettere i corpi e pensare come struttura di quella in

- esame \rightarrow EQUILIBRIO DI OGNI SOTTOSTRUTTURA (sint. sia π_i^e, π_i^i)

[2 modi x risolvere equations]

Ex: 2 travi connesse in A con incastro, in B con cern. interna e in C con



cavallo. $NGL = 6$ e la somma

delle $m = 6$; inoltre e' ben

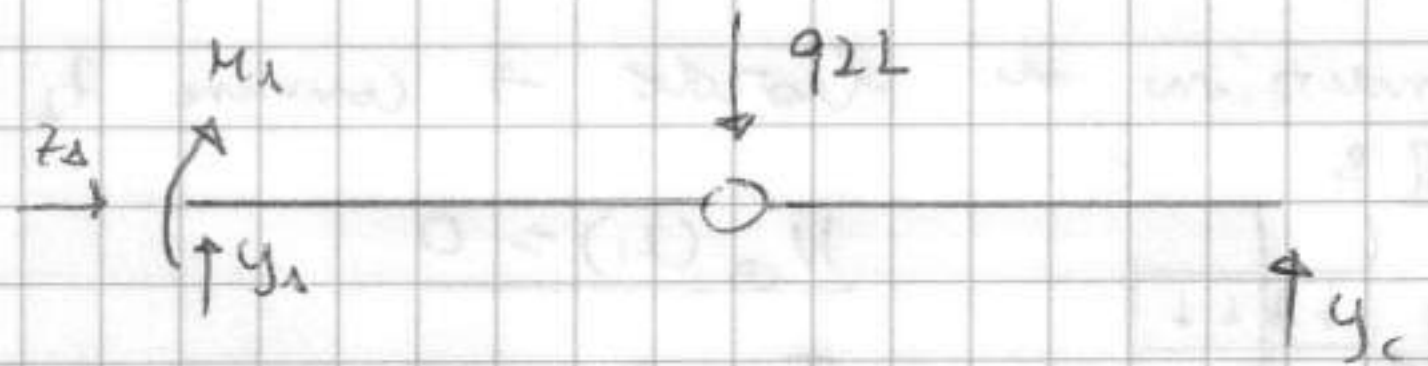
sufficiente. Possiamo evidenziare 6 Reaz.

Vinc. [3, 4, 1]. Nell'eq. globale, le possibili Reazioni sono:

Possiamo scrivere 3 eq. (indip. xhe)

lo considero come un unico

corpo. Struttura esternamente e

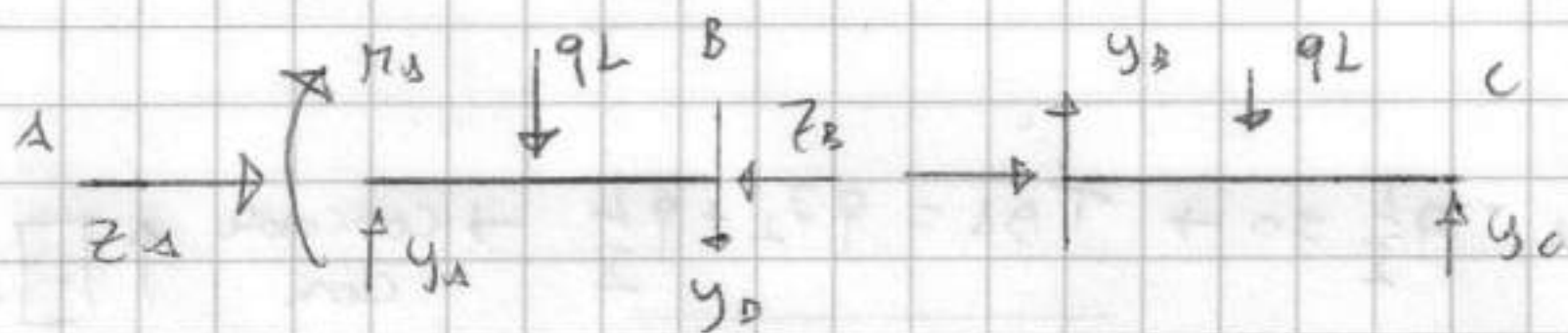


IPERSTATICA, ma se lo mettiamo in L e vedo le π_i che si scambiano

in B, questo ad aggiungere altre 2 eq. (indip. \Rightarrow int. di 6 eq

e 6 inc. e' risolto problema.

Possiamo corr. l'eq. globale + l'eq. di 1 sottostruttura:



[Reazioni che si scambiano

non = e' contrarie tranne se

in B c'è azione concentrata]

Dobbiamo mettere anche il carico.

\hookrightarrow costante $\times M = 0$ in cerniera

In generale e' + comodo fare eq. delle due strutture prese a se

struttura e' esternamente iperstatica.

Eq. x 2 corpi, AB e BC:

$$1) Z_A - Z_B = 0, Y_A - qL - Y_B = 0, M_A - qL \frac{L}{2} - Y_B L = 0$$

$$2) Z_B = 0, Y_B + Y_C - qL = 0, -Y_B L + qL \frac{L}{2} = 0$$

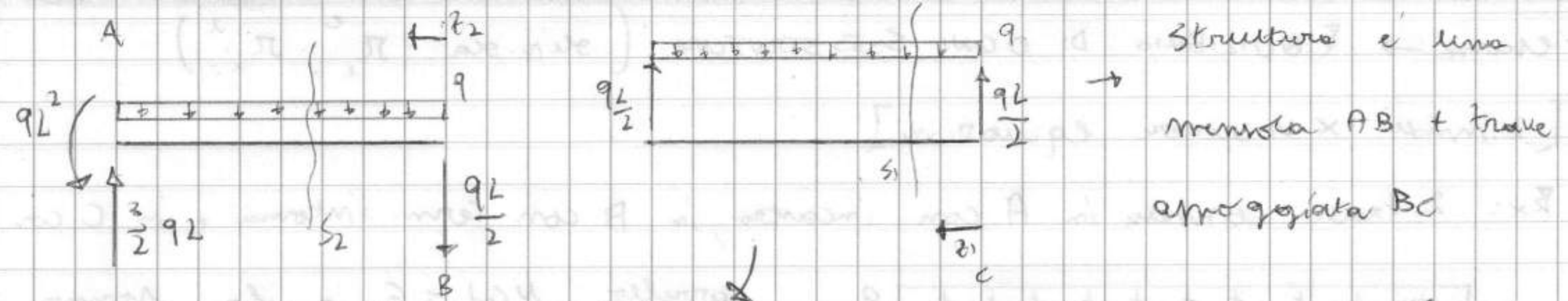
Queste 6 eq. sono il sist. lin. indep. x calcolare le Reaz. Vinc.

interne ed esterne.]

$$\underline{Z_A = Z_B = 0}, \underline{Y_B = \frac{qL}{2}}, \underline{Y_C = \frac{qL}{2}}, \underline{Y_A = \frac{3}{2} qL}, \underline{M_A = - qL^2}$$

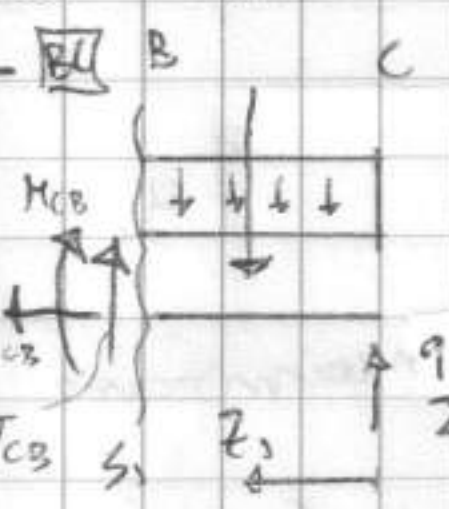
(Visto su M_A e' opposto)

Risolviamo schemi corpo libero x entrambi i corpi.



Struttura e' una
 mensola AB + trave
 appoggiata BC

Troviamo i diagrammi di sollecitazione. Si verifica se I e' costante
 finita [non e' vero, I e' concentrata, si verificano le cariche sono
 continue] prendo l'ascissa x AB e una x BC. Su BC e' insip. prendo la
 da B o C e viceversa, ho sempre stessa situazione. Su AB e' \leftrightarrow , se verso
 condizioni su bordo \rightarrow conviene z_2 da B ad A.

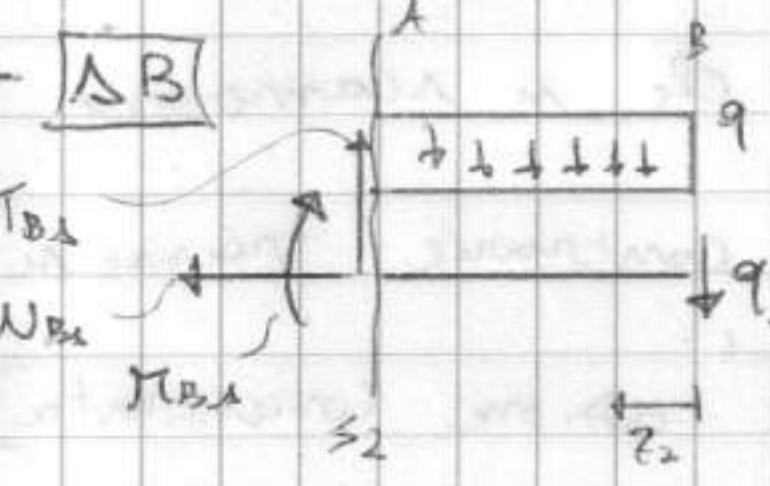


$$N_{CB}(z_1) = 0$$

$$T_{CB}(z_1) - qz_1 + \frac{qL}{2} = 0 \rightarrow T_{CB} = qz_1 - \frac{qL}{2} \text{ [e' lineare]}$$

$$M_{CB}(z_1) + \frac{qz_1^2}{2} - \frac{qL}{2}z_1 = 0 \rightarrow M_{CB} = -\frac{qz_1^2}{2} + \frac{qL}{2}z_1$$

In 0 ho $M=0$; spostandomi di una q $q(z_1)$, il termine quadratico e'
 minore, quindi parte terra e' inferiore.

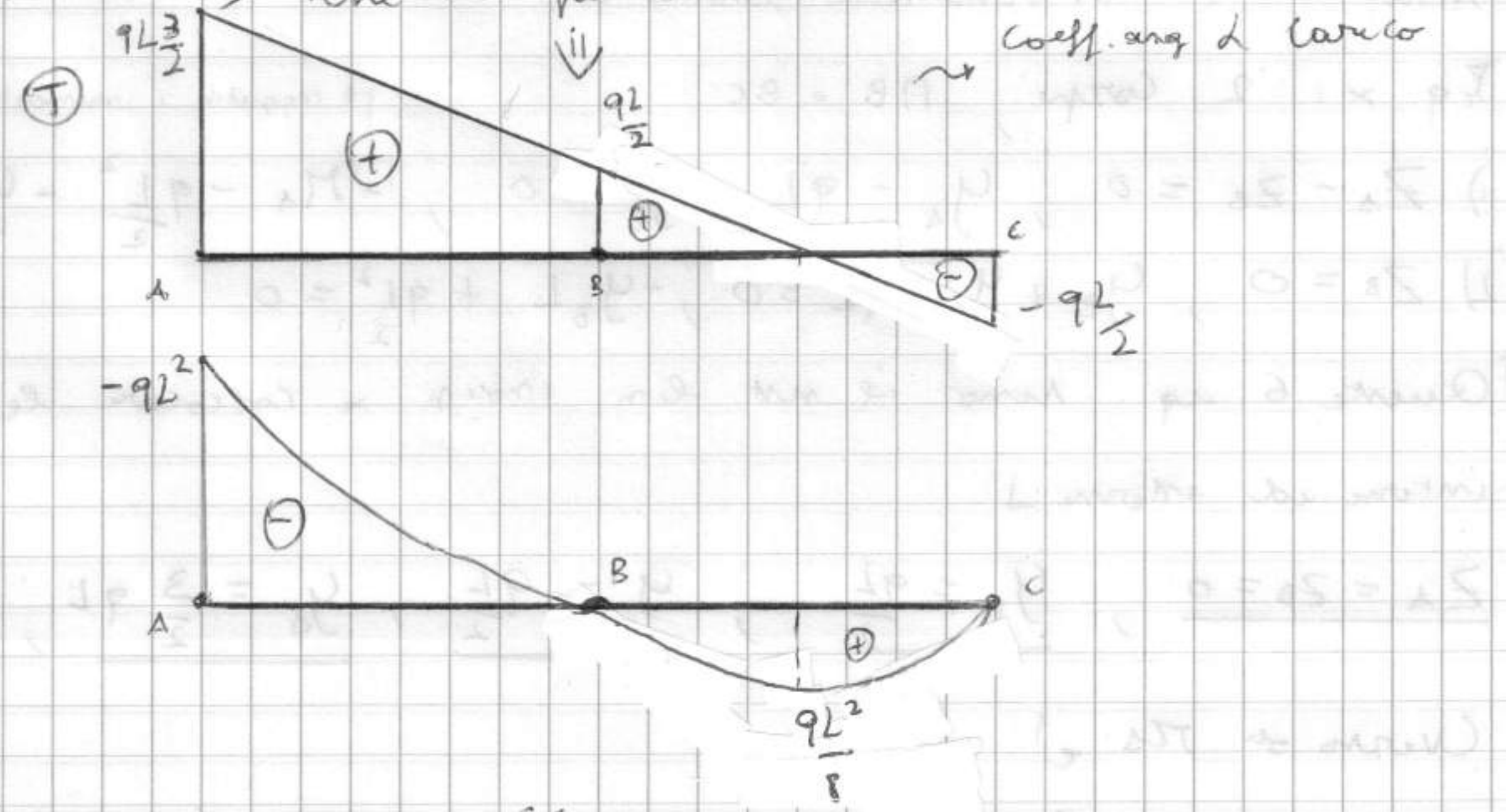


$$N_{BA} = 0$$

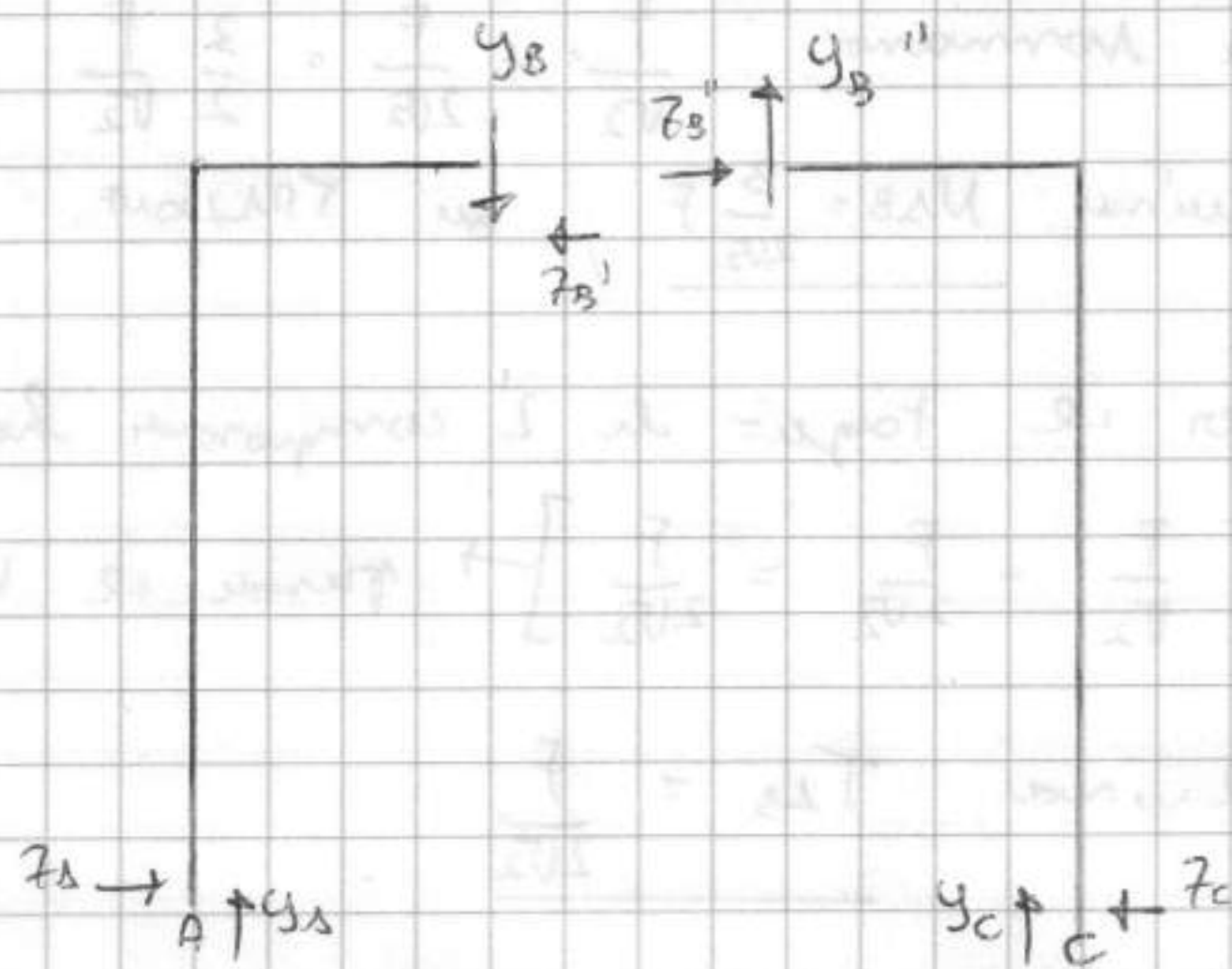
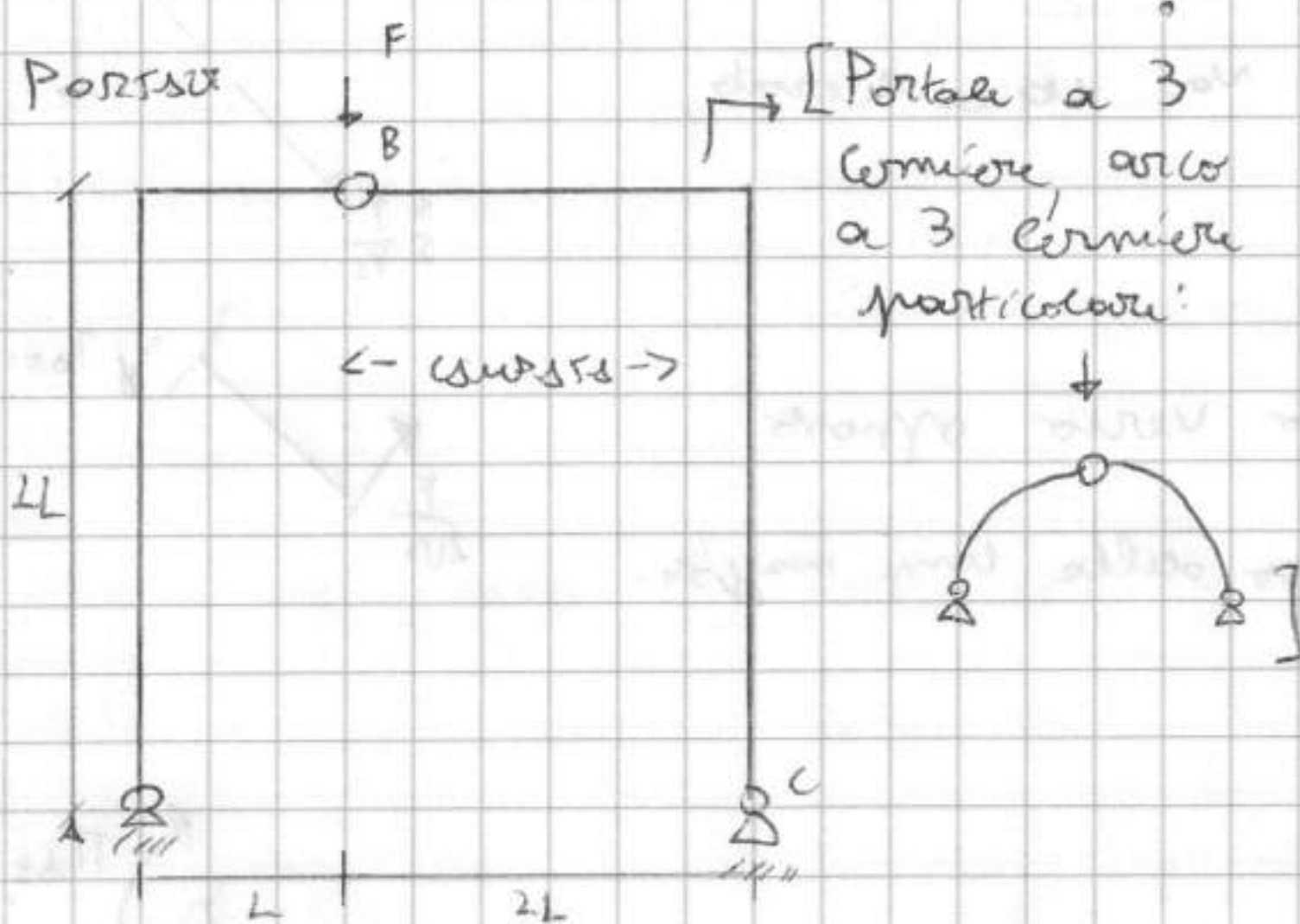
$$T_{BA} - qz_2 - \frac{qL}{2} = 0 \rightarrow T_{BA} = qz_2 + \frac{qL}{2} \rightarrow \text{concorde con } \uparrow \downarrow$$

$$M_{BA} + \frac{qz_2^2}{2} + \frac{qL}{2}z_2 = 0 \rightarrow M_{BA} = -\frac{qz_2^2}{2} - \frac{qL}{2}z_2$$

I due termini del momento non sono "antagonisti", quindi $\forall z_2$ da B ad A
 i termini si sommano \Rightarrow terra la parte SUPERIORE

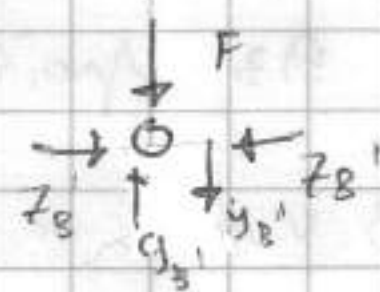


Struttura intelaiata: Travi (orizz.) + Pilastri e montanti (vert.)

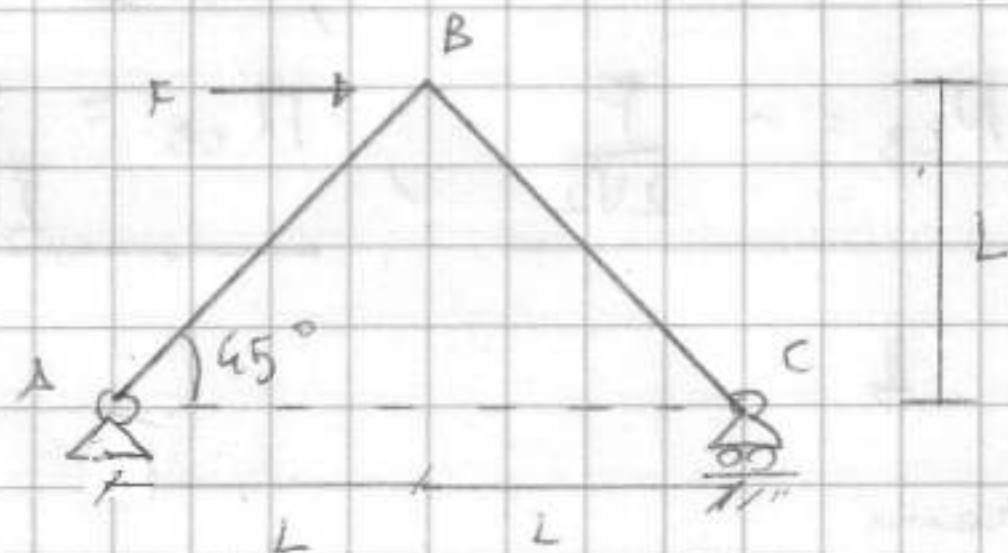


Quando c'è F concentrata in cerniera non c'è detto che si distribuisca in maniera uguale su A e C. E - essendo in questo caso simmetrico - tras.

nono <> e n. gli incognite aumenta [8 eq], devo trovare altre 2 eq equilibrio, quello del nodo B. Una volta che ho fissato i vari delle reazioni a F applicata.



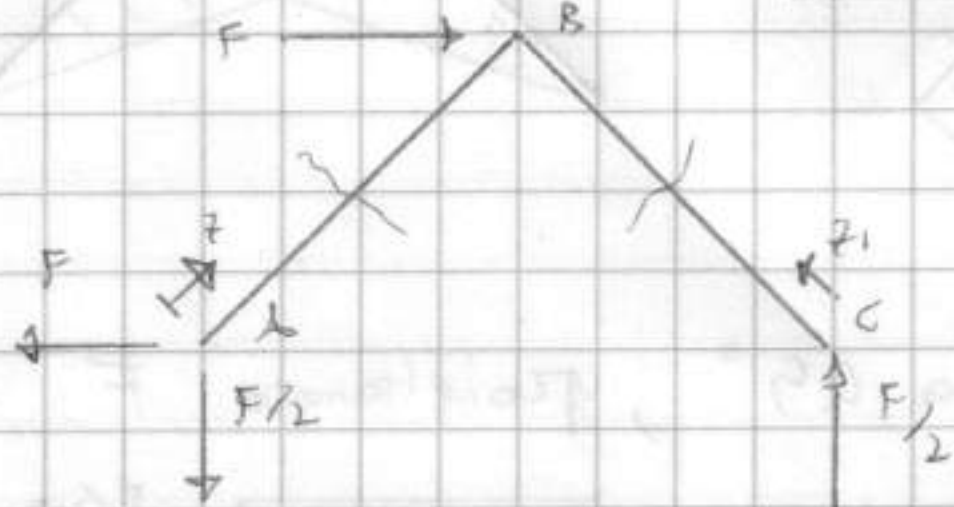
ARCO A DUE CERNIERE



$$Z_A + F = 0 \Rightarrow Z_A = -F$$

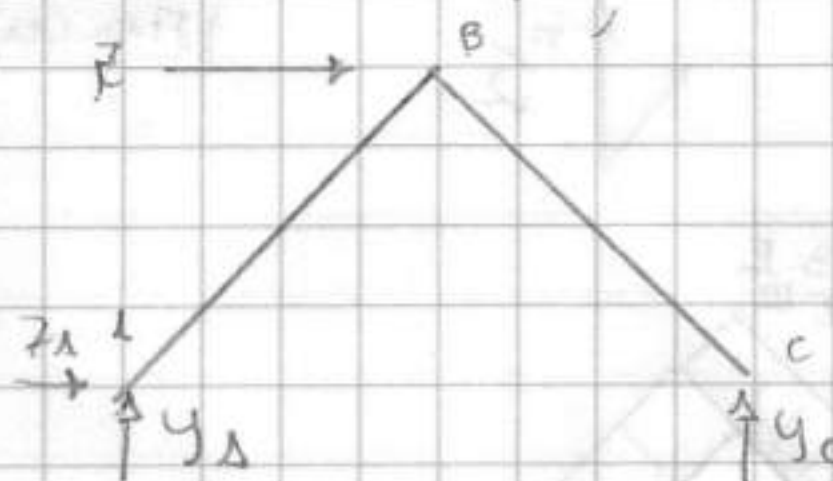
$$Y_A + Y_C = 0 \Rightarrow Y_A = -Y_C \Rightarrow Y_A = -\frac{F}{2}$$

$$F L - Y_C 2L = 0 \Rightarrow Y_C = F/2$$



Due aste continue in B 16/1/06
e vincolata istantaneamente a terra
(vale x carichi concentrati).

È un unico corpo tras. vincolato.

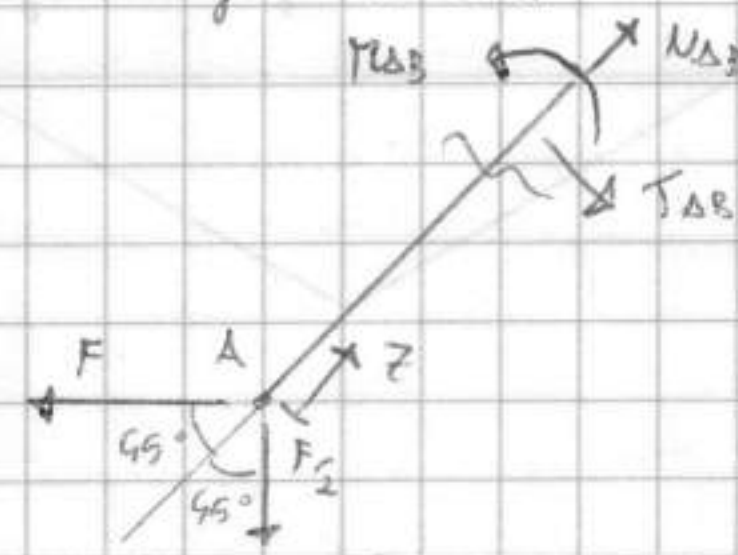


L' inclinazione dell'asta ci obbliga a proiettare reazioni lungo l'asse della trave, che nei diagrammi poniamo come assi di riferimento.

Quindi, facendo una generica nt.

S, evidenziamo in $\{ T, N \}$ con conv. "+"

E' equilibrio, distinguendo le risultanti in direz. di N, di T.



N_{AB} e' azione rimp. ad AB . $\rightarrow H \pm F/\sqrt{2}$ e $F/\sqrt{2}$, conosciute e

normale: $\frac{F}{\sqrt{2}} + \frac{F}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \frac{F}{\sqrt{2}}$ e va equilibrata,

quindi $N_{AB} = \frac{3}{2} \frac{F}{\sqrt{2}}$, su AB verso.

Per il taglio le 2 componenti hanno verso opposto

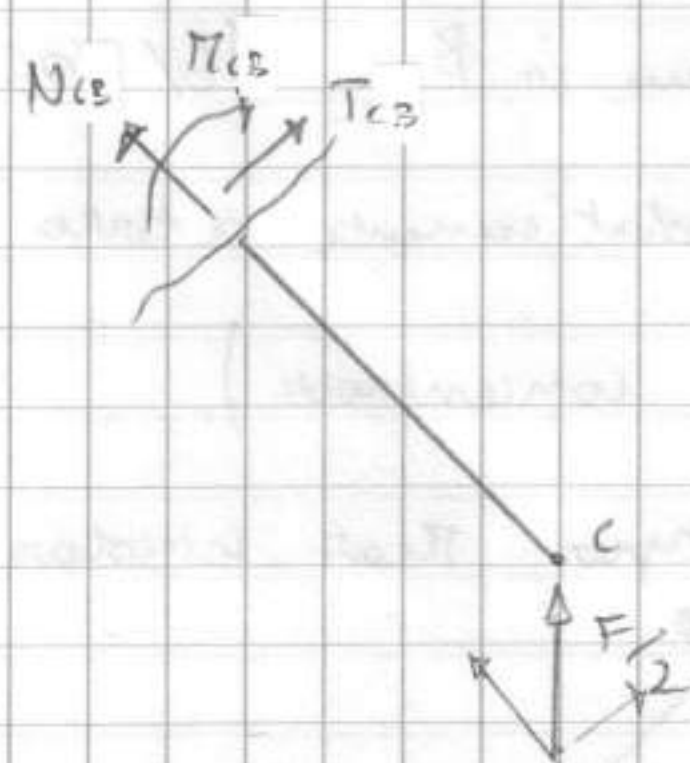
$\left[\frac{F}{\sqrt{2}} - \frac{F}{2\sqrt{2}} = \frac{F}{2\sqrt{2}} \right] \rightarrow$ prende il verso delle comp. maggiori.

Quindi $T_{AB} = \frac{F}{2\sqrt{2}}$

Per il momento solo T lo sta.

$M_{AB} = \frac{F}{2\sqrt{2}} \cdot l \Rightarrow M_{AB} = \frac{F}{2\sqrt{2}} l$

Sì può fare taglio in AB , poiché qui i diagrammi sono continui, e poi si parte da B verso in C , ma non conviene. E' meglio prendere la C centrale e tagliare da C verso B .

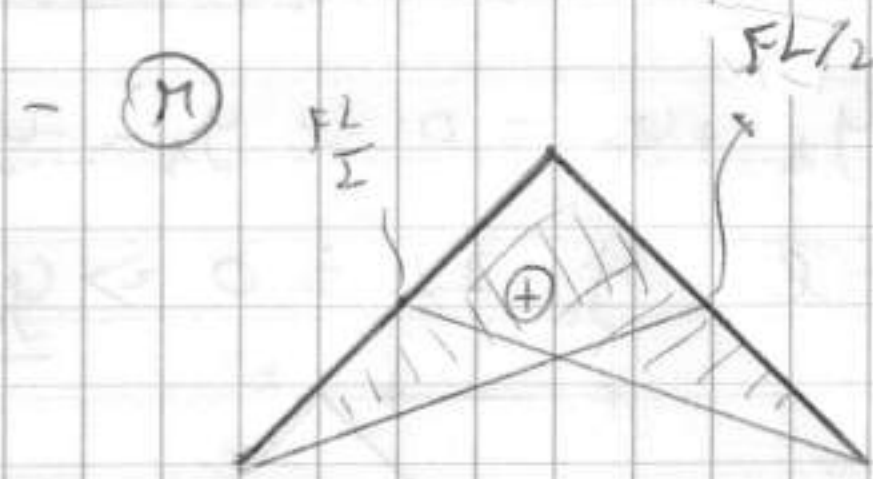
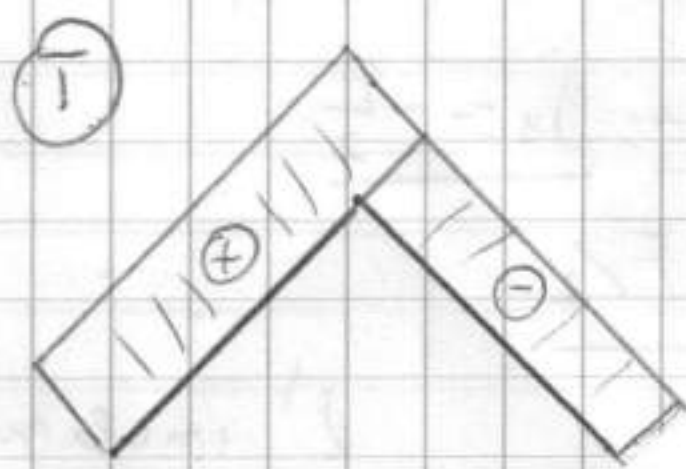
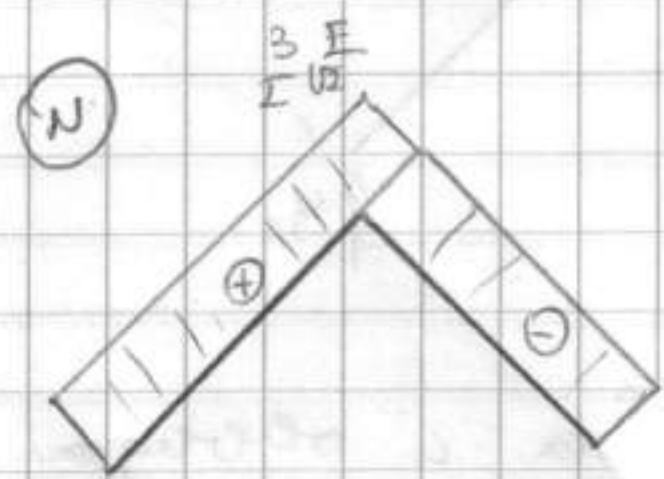


Le componenti in C sono identiche, $F/2\sqrt{2}$.

$$T_{CB} = -\frac{F}{2\sqrt{2}} ; N_{CB} = -\frac{F}{2\sqrt{2}} ; M_{CB} = \frac{F}{2\sqrt{2}} l$$

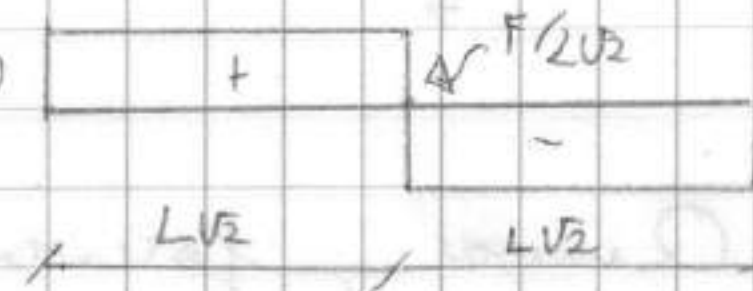
\downarrow

Tracciamo i diagrammi.



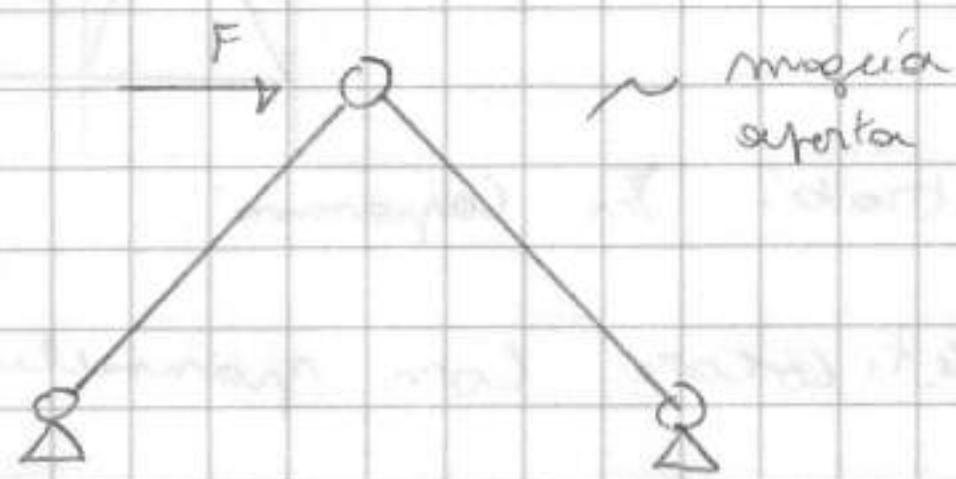
In B c'è F concentrata, travi sono inclinate a 45° ; proiettando F su

lavora direzione lungo diagramma trave appoggiata: \oplus



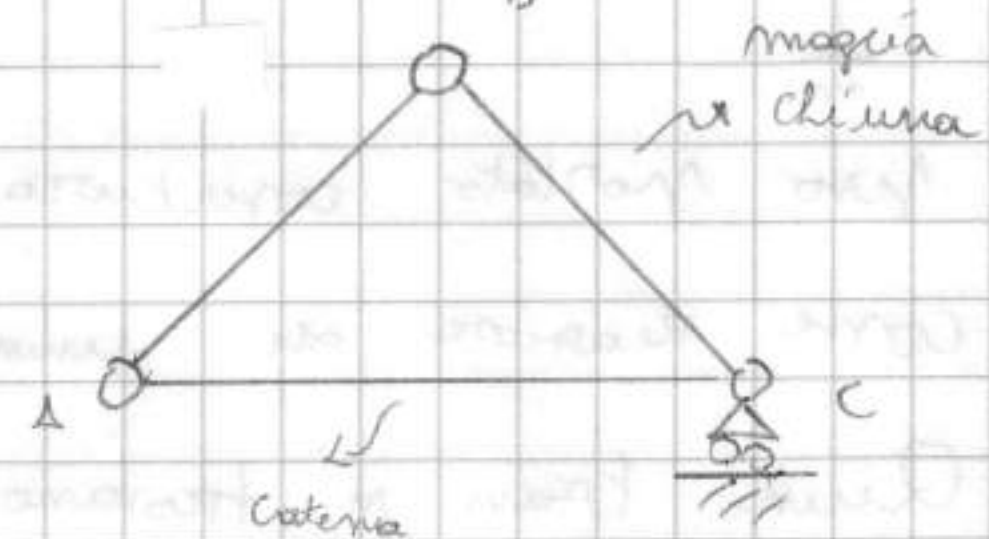
Questo schema e' utile a modellazione trave a sezione inclinata, soletta

Continua. Struttura è molto sollecitata, soprattutto x e momento. Per studiare gli effetti si può semplificare struttura e passare a SCHEMA RETICOLARE (ma T e M).



Il + semplice [arco a 3 cerniere], schema a TRUSS SPERSA.

Uno schema equivalente è [composto da una cerniera in C] che nelle



Strutture reali } carichi TERMICI, Strutture

→ a deformarsi e a incrementare il

volume col calore e ↓ col freddo. Se

strutt. è vincolata / p.t. è mobile, carichi

ambienti del vincolo, non trasmette effetto a struttura. (CUNTO DI

DILATAZIONE ma vincoli). Appoggi mobili servono a non far nascere

degli STATI DI COAZIONE INTERNI. Altrimenti vincoli esterni sollecitano

tutto degli elementi strutturali] → è + logico innanzi elemento di

CATENA x ambire ciò che fa spostare orizzontalmente (ARCO A

SPINTA ELIMINATA], prima ambire alla catena che in generale è

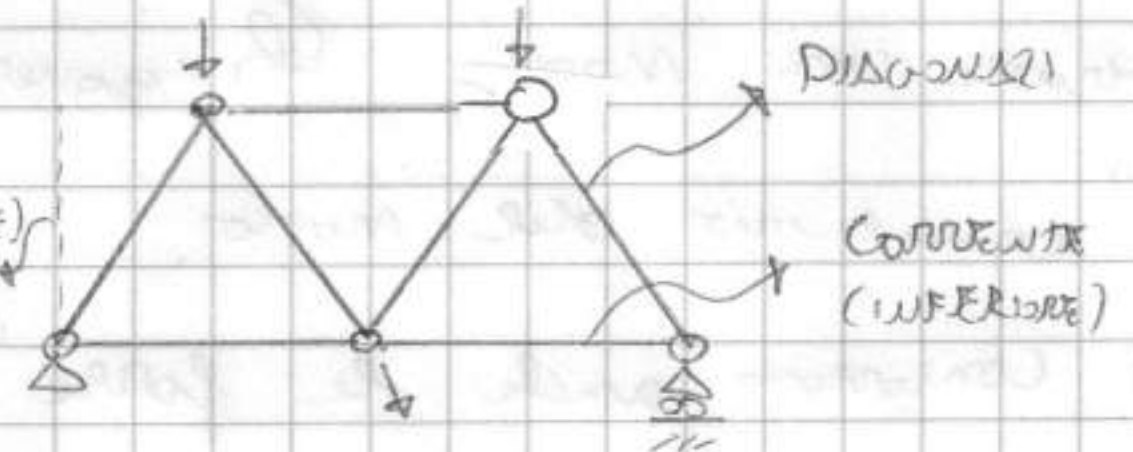
sotto TIRANTE. Strutture reticolari sono sistemi con Σ di n.t. a

maglia chiusa con sup. regolare. Es:

Ogni nodo è cerniera interna

(CAVANTE)

[non trasmette M] Si usano x



carichi NODALI ed i 2 tecniche x risolverli:

- METODO DEI NODI → impostazione equilibrio traslazioni a nodi

- METODO DELLE SEZIONI DI RITTER

In ogni asta può nascere solo N . Quando sono diagonali sono orientati secondo inclin. Asta può essere o interamente tesa (TIRANTE)

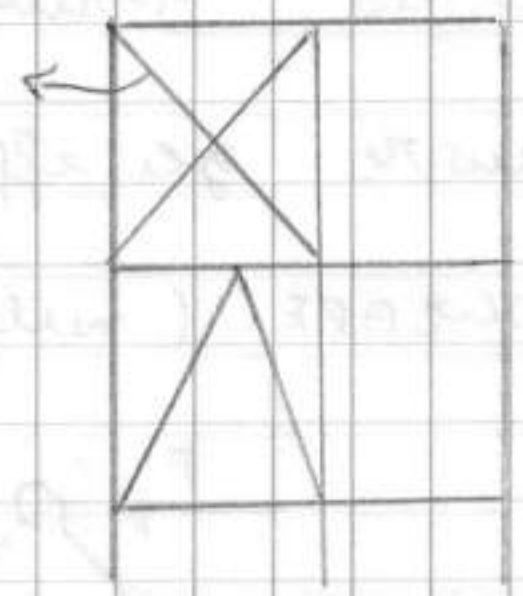
o int. COMPRESSA (PONSANE). Sist. PUNT / TIR. si usano in schemi a

telai x stare attenti ai controventatori x ambire f. orizzontali

(vento e/o sisma).

Se i piani si controventano

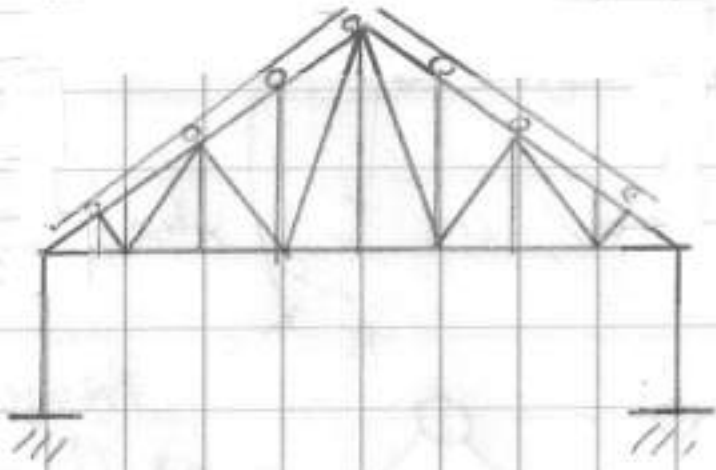
SINT.
a voce



In realtà in strutture reticolari ogni elemento

è soggetto a suo proprio (e) di forma continua di carico) ed è + semplice fare sezioni

carichi portati come carichi nodali concentrati. Ex Capannoni.



Tetto e trave reticolare con pannelli prefabbricati collegati nei nodi da travi a C "I" o da profili a L "T". Qui in

pro portato copertura e tramezzo da queste travi. In modo come reazione su una trave appoggiata.

Queste travi si trovano in p.ti d'acciaio. Giunzioni nella realtà non sono giun. ideali [c'è M x attrito], o giunti saldati.

Passando ai "0" come nodi continui, M e T sono trascurabili. (e)

effetto ulteriori nei correnti compari un problema di 2° ordine e possono Membrane, instabilità strutturale → collasso).

RISOLUZIONE SISTEMA (ex Metodo dei nodi)

Arco a spinta eliminata. Si evidenz.

tutte le forze che arte portano Membrane con nodi che governa e l'equilibrio del nodo.

In A considerano anche le forze

armati delle arte (verrà arbitrario ma dietro schema di equilibrio).

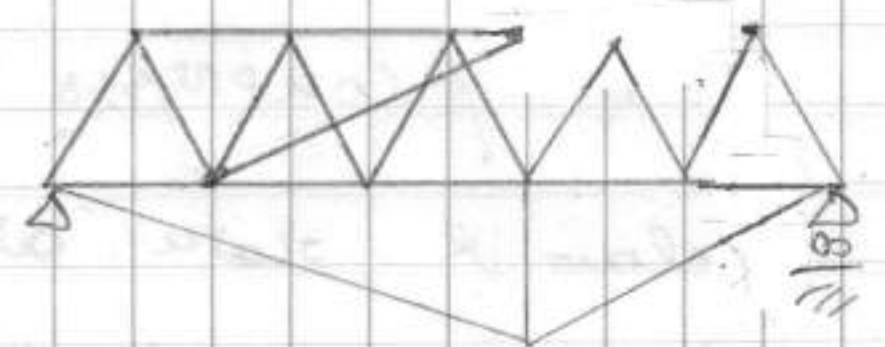
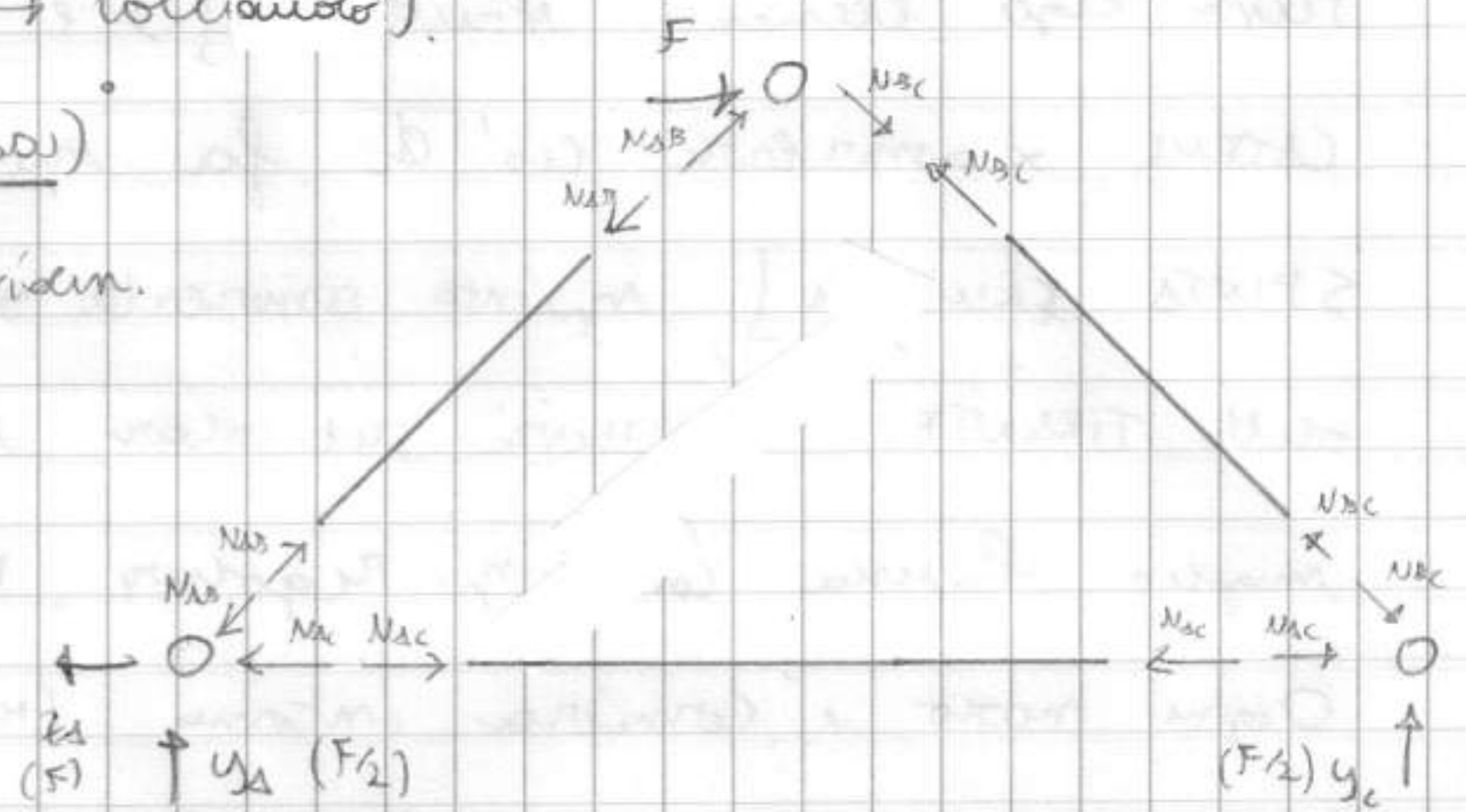
Struttura è esternamente instabile ⇒ per fare l'equil. globale e calcolare indipendentemente le reazioni esterne.

Condizione necessaria x instabilità struttura reticolare è $[m = n \text{ di arte} + c = n \text{ di cerniere}]$ $2C = m + U_e$ "2" sic' mostra 2 eq. 1 nodo, $U_e =$

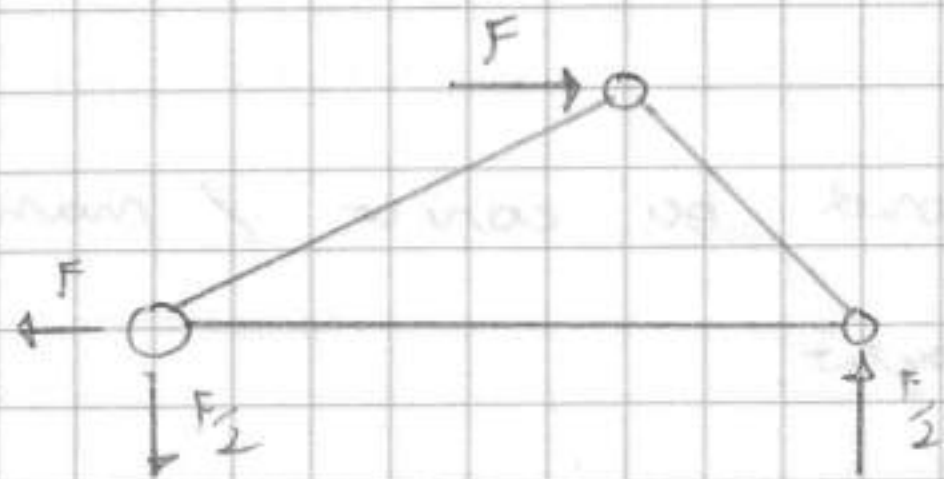
gradi di libertà esterni. (Cond. non sufficiente)

oltre a maglie triangolari, n porte alla c'e

(60) in traliccio che può ruotare → ASSE FUSI DISPOSTI



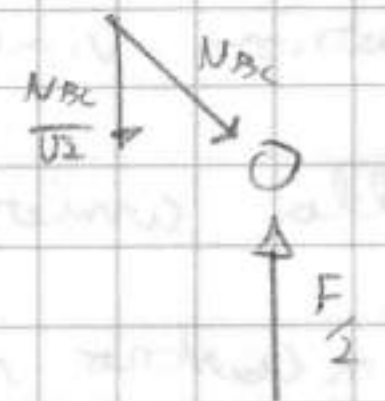
Applicando eq. esterni: [nodo C]:



→ Nel nodo n non sostituire come carichi esterni

Facciamo eq. verticali in C, unica incognita

e' proiezione $N_{BC} \rightarrow N_{BC} \sin 45^\circ = \frac{F}{2}$



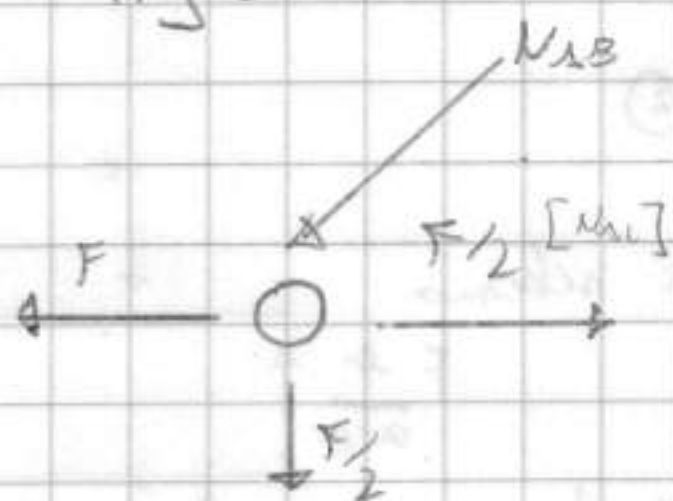
quindi $N_{BC} = \frac{F}{\sqrt{2}}$. Sull'orizzontale ho

$\frac{N_{BC}}{\sqrt{2}} + N_{AC} = 0$, sostituendo $N_{AC} = -\frac{F}{2} \Rightarrow$ alla AC e' tesa, e

un tirante. V nodo n può applicare questo equilibrio.

[Facciamo eq. globale, evidenziando N che alla scambia con il nodo poiché T e N trasmissibili. I vincoli sono stati ma dopo equilibrio li mettiamo. Proietta le F diagonale in oriz. e vert., equil. V nodo]

[nodo A]:



Dato imporre 0 eq. Vert. 0 eq. oriz. (nodo 1 incognita), ex: Vert. col:

$-\frac{N_{AB}}{\sqrt{2}} - \frac{F}{2} = 0 \Rightarrow N_{AB} = -\frac{F}{\sqrt{2}}$ + ho finito,

Gatta nodo VERIFICARE equilibrio nodo B (tutti i termini sono noti).

Risultato schema di equilibrio

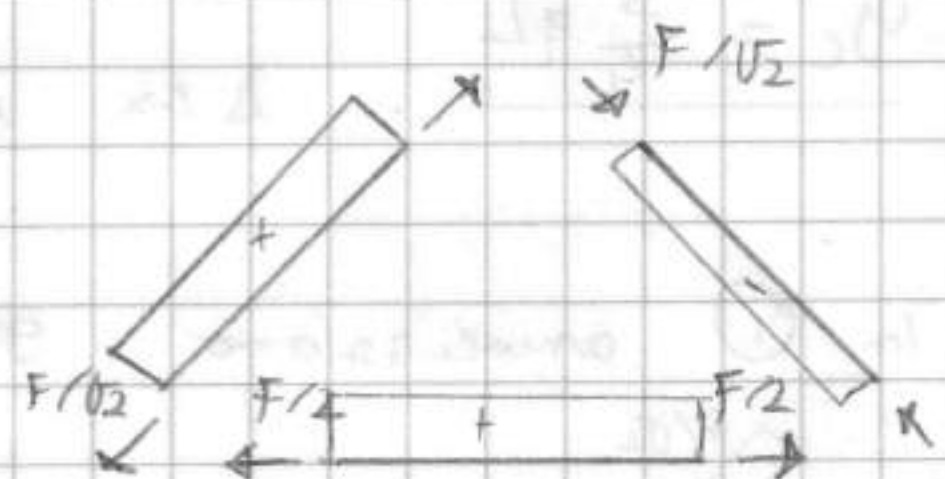
x le aste AB e' tirante, BC e' puntore

e il corrente inferiore AC e' catena, tirante.

(inf. bilancia come coppia le momenti che

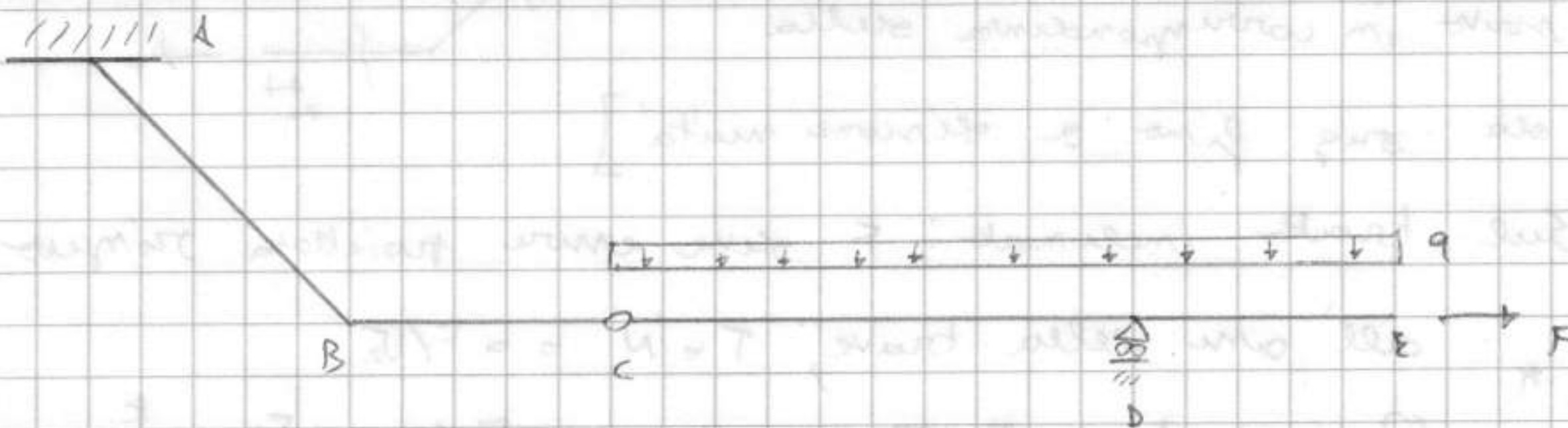
n' generata nell' arco a 2 bracci dovuta a eccentricita' della F

l'imposto alla struttura.



x i diagrammi di N, N e' cost e + x tiranti, - x puntori.

19/1/06



Nell'estremo libero, se non ci sono carichi sollecitazioni sono NULLE
(o prendono il valore del carico concentrato).

Nel carrello c'è p.t. di continuità; ci sono cond. su carico / reazione vincolare e c'è SARTO nel diag. del taglio.

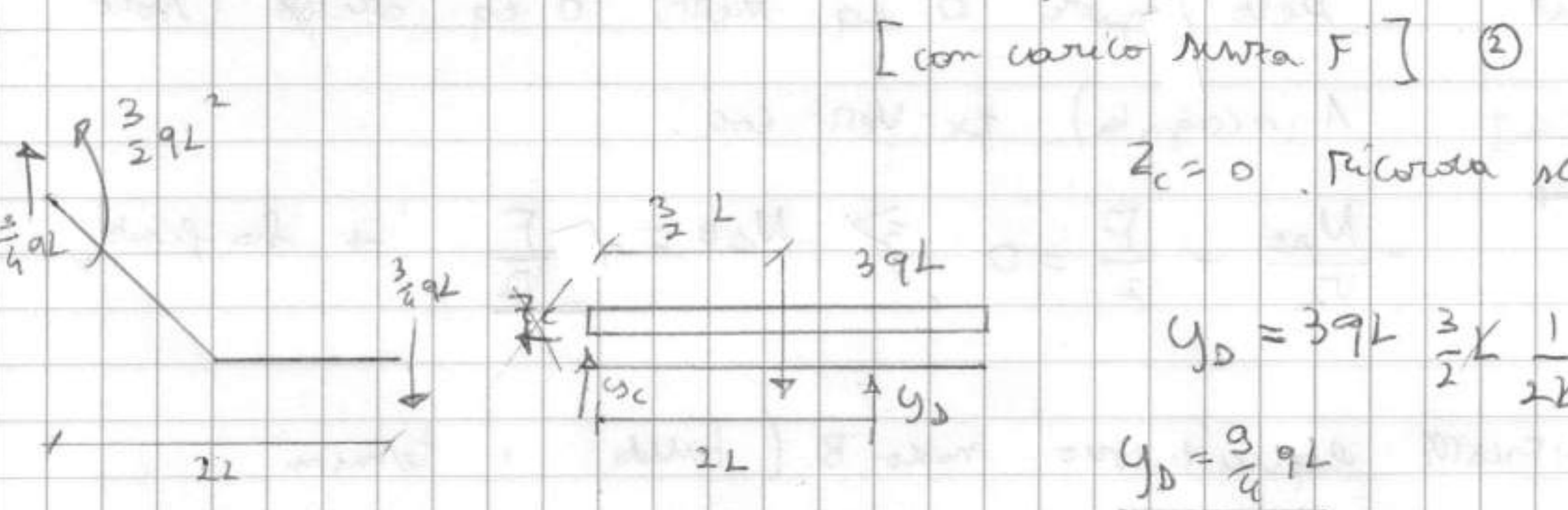
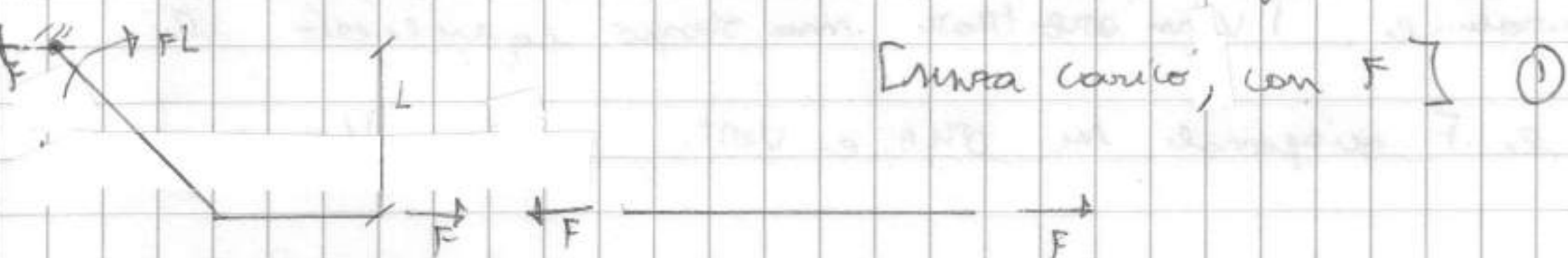
Nella cerniera il momento non può passare $\Rightarrow M=0$ in CERNIERA.

L'incastrato si prende sollecitazioni T e N come momento.

Tutto ciò lo so a PRIORI.

Ha carico costante \Rightarrow Taglio lineare \Rightarrow Momento parabolico.

Vale sempre principio sovrapposizione effetti. CDE è struttura connessa a struttura vincolata alla incastro. F si trasmette completamente in C.

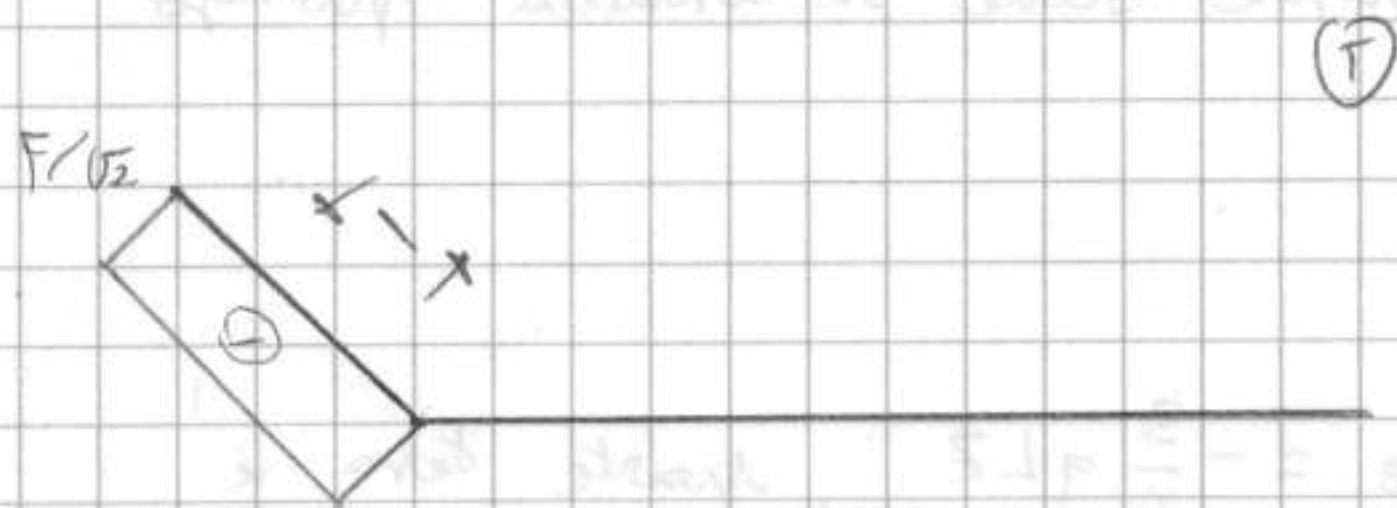


$y_C = \frac{3}{4} qL$. Δx si sposta solo $\frac{3}{4} qL$. Nasce momento della f. spostata.

In ① analizziamo i giugicarni. Tanti tagli quanti sono p.t. su
promessa giug. Elemento è zero.
Nella parte a sx.

C'è giug. scivolo a \downarrow , dopo 2 tagli:
[L'eq. che serve in corrispondenza della
azione vale da sug. fino a discontinuità]

Sul tratto inclinato: F delle estremità proiettata sull'asse
all'axe della trave; "T e N" = $\pm F/\sqrt{2}$
Quindi $N_{AB} = F/\sqrt{2}$; $T_{AB} = -F/\sqrt{2}$; $FL - \frac{F}{\sqrt{2}}L - M_{AB} = 0$

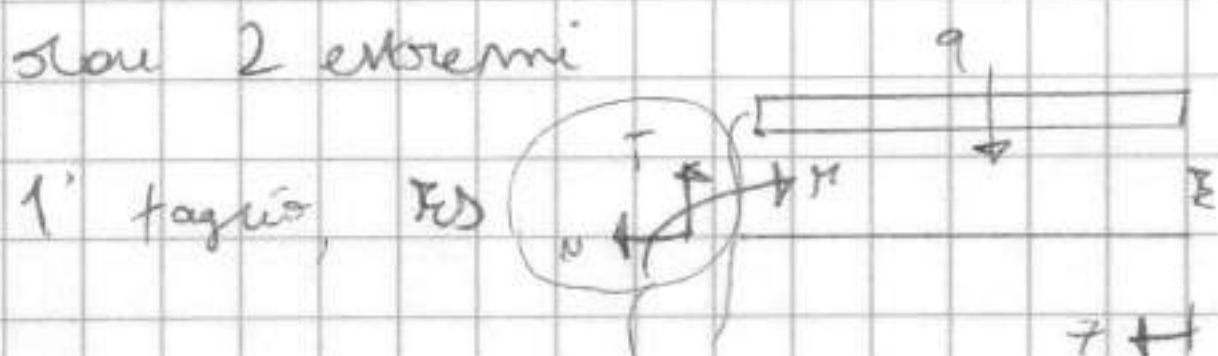


Su CDE $T=0$, su BC $e'=0$.
 Su AB e' cost.
 Su questi tratti dove $T=0$, M e'
 e' M e' M e' M e'
 al più costante, ma poiché
 in CDE M e' M e' M e'
 abbiamo momenti. Da A a B invece
 ha M che tiene parte tesa
 (in B $=0$, $z=L\sqrt{2} \Rightarrow M=0$)

Conv. (2) Princiamo carico in CDE

Della operazione i tagli. E' comodo partire

solo 2 estremi



Conv. da M a destra. In E non c'è F. conc.

$$N=0; T_{ED}=qz; M_{ED}=-\frac{qz^2}{2}$$

In D, $T=qL$. Il momento,

spostandoci a poco, tiene

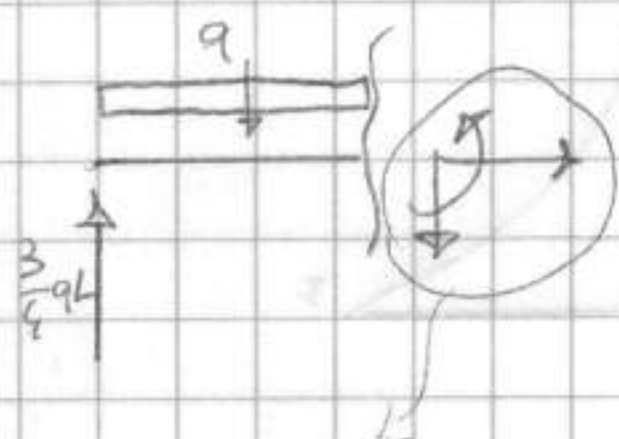
parte negativa.

ha parabola (poiché T

cambia da E a D) e'

convessa

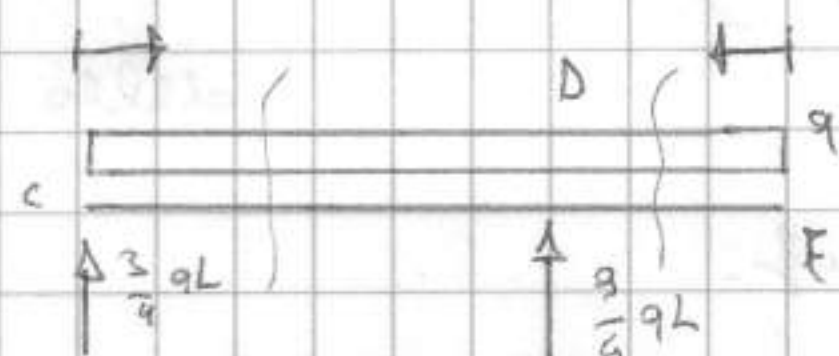
2° taglio, CD.



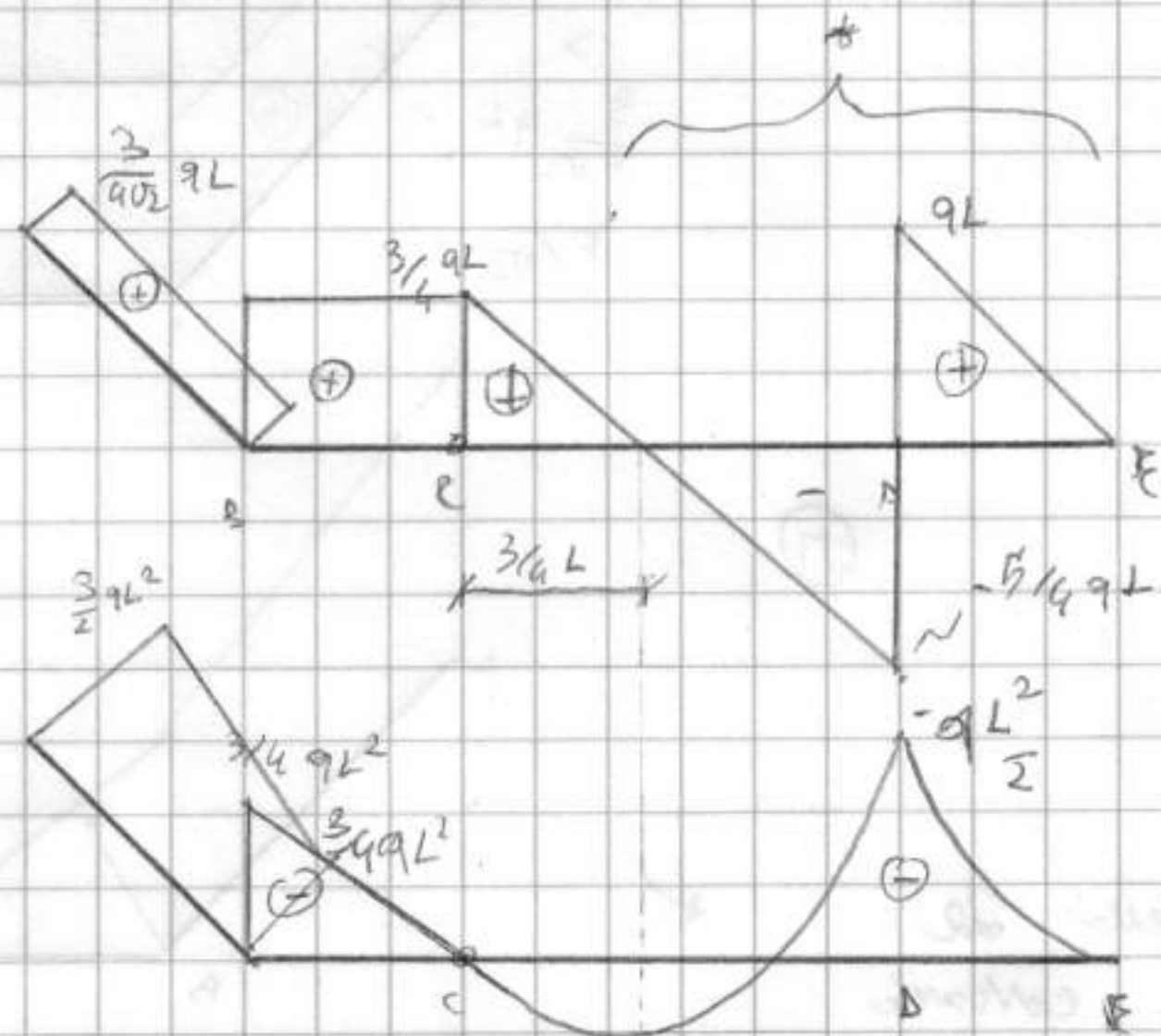
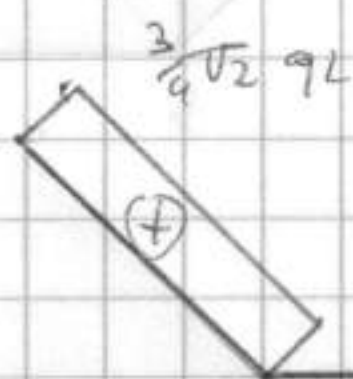
Quarto taglio da D a M. $N=0$

$$T_{CE}=\frac{3}{4}qL-qz; M_{CE}+\frac{qz^2}{2}-\frac{3}{4}qLz=0 \rightarrow M_{CE}=-\frac{qz^2}{2}+\frac{3}{4}qLz$$

In C M deve essere nullo. In $z=0$, $T=\frac{3}{4}qL$; cambia segno \Rightarrow



* = norma ampiezza volta
 $=\frac{3}{4}qL$ verifica, lo
 stesso già sopra



ci sarà ess. relativo in (H). Per sapere dove si annulla pongo

$l'eq=0$, e trovo $\frac{3}{4}L$.

Ora con AC.

1° taglio BC.

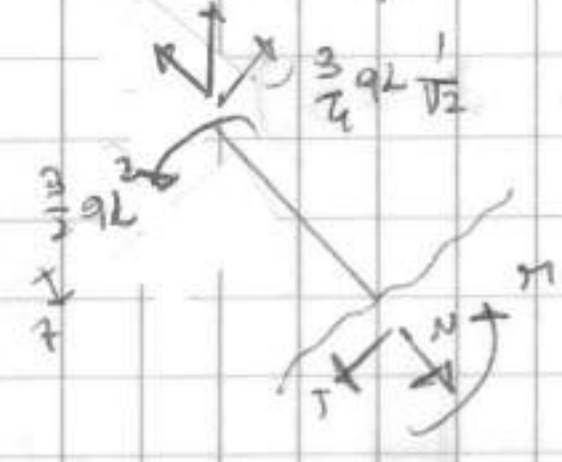
$T_{CB} = \frac{3}{4}qL$; $M_{CB} = -\frac{3}{4}qLZ$, parte terra e



rova, grafici su parte con stessa tangente

2° taglio AB

Ho N di trazione $N = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} qL$, stessa per $T = \frac{2}{4\sqrt{2}} qL$

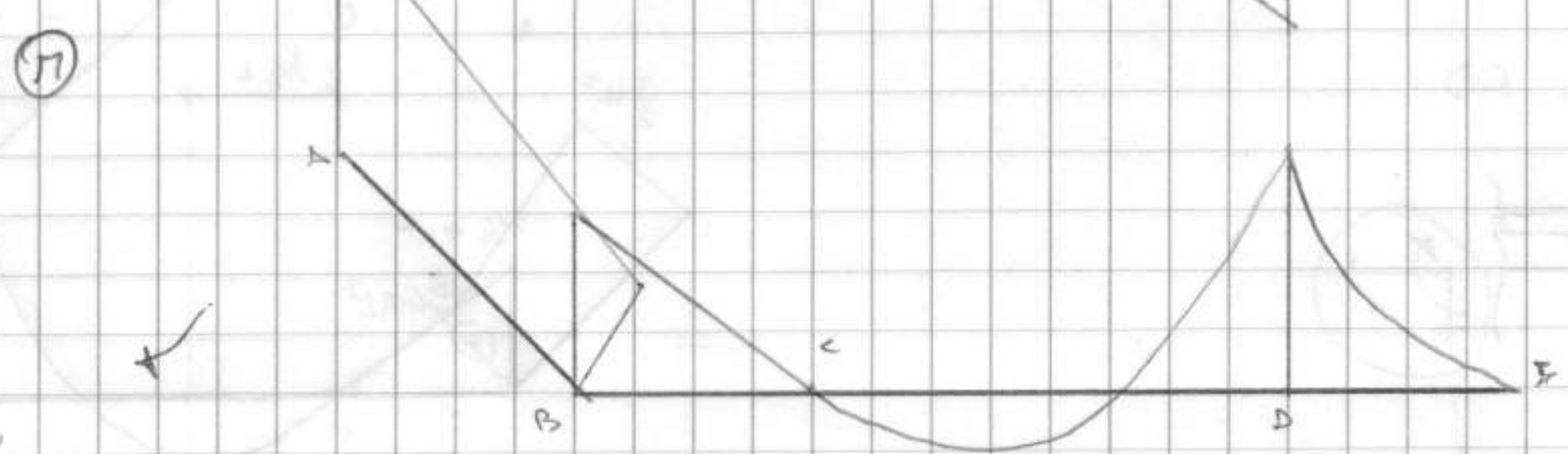
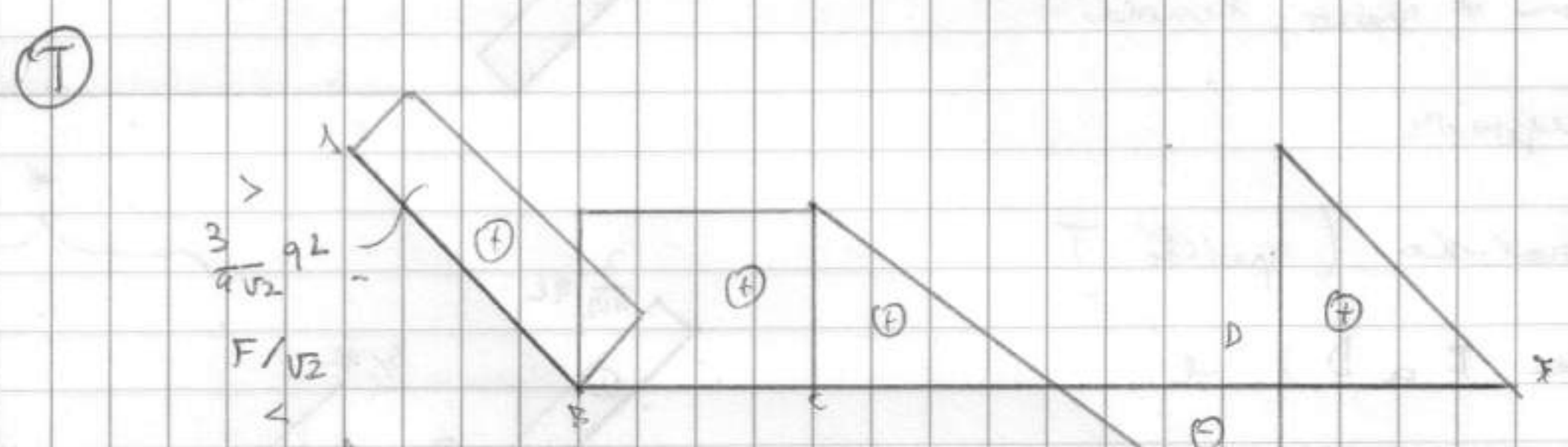
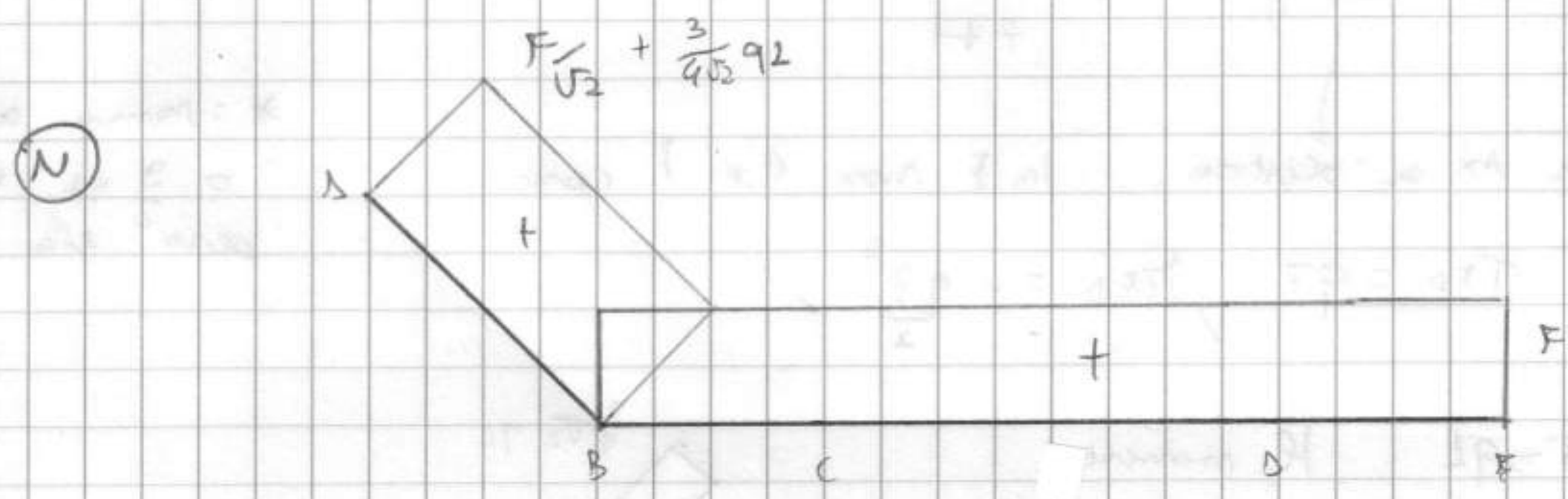


$M_{AB} = -\frac{3}{2}qL^2 + \frac{3}{4\sqrt{2}}qLZ$; parte terra e rova.

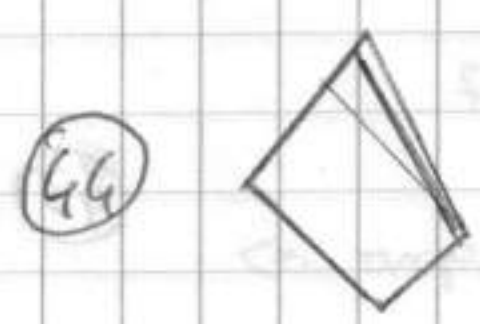
È invariante rispetto alla var. di direzione dell'asse della trave; T e N cambiano o cambia (ruota) il

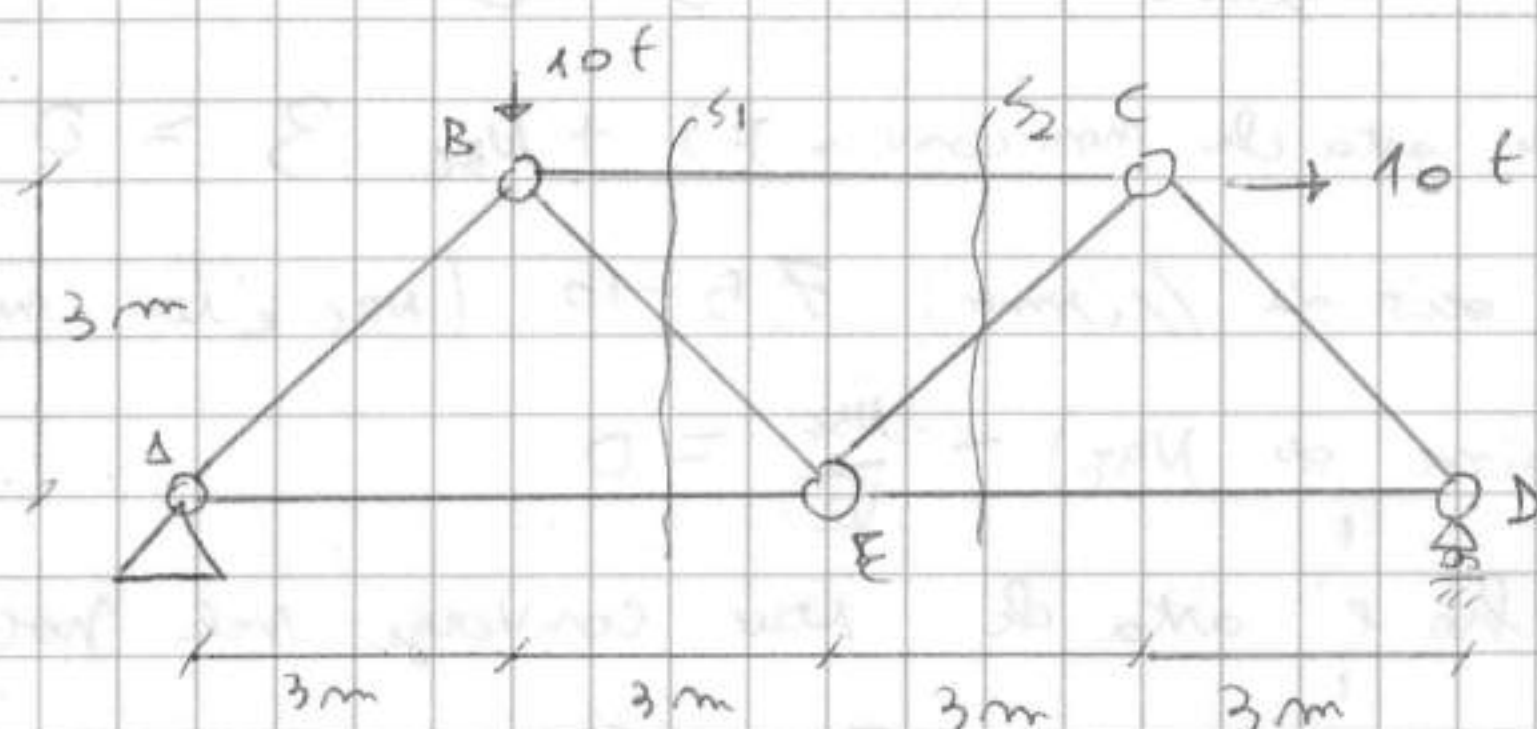
MM. rif.

Sommiamo gli effetti:



rispetto al
diag. costante
taglio piccola
fetta





Struttura continua con corn.

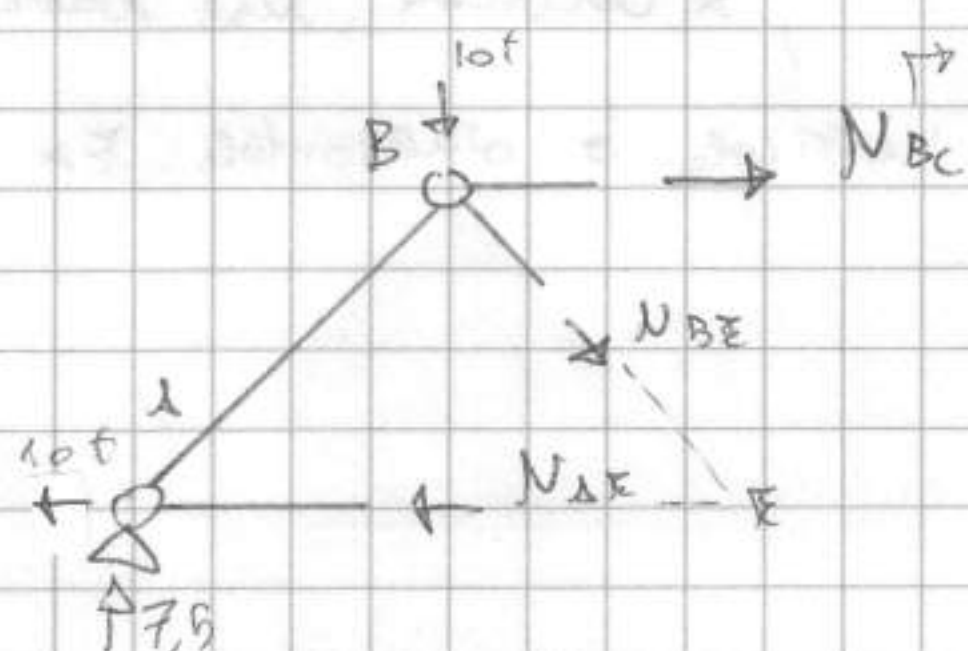
int. e caricata nei nodi \Rightarrow

T e M scarseggiano nulli, solo

N. Si può applicare il metodo dei nodi.

Si definisce un ch. taglio

almeno + di 2 arte e almeno 1 arte della str. devono convergere nello stesso nodo, proprio o improprio. Parte di str.



\rightarrow forza N in arte BC

Si è str. di Ritter taglia 3

arte e di quelle tagliate a coppie su 2

Convergono in un nodo. NBC e NBE avendo //

// in un nodo improprio = n. to all' ∞

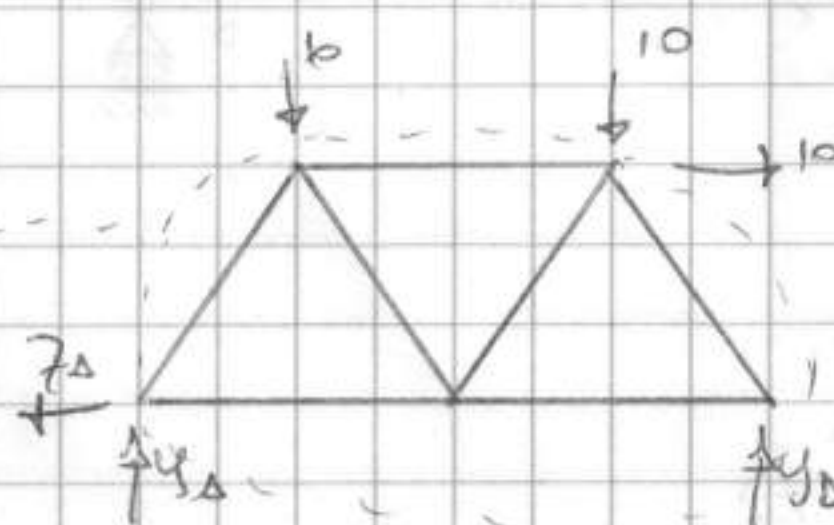
dove si congiungono, n. to intour. Rette //. Per collocare forza con equilibrio momenti rispetto a poli su convergenza. X quelle arte che conv. in polo proprio, l'equil. dei momenti è effettivo, il braccio è finito. Rispetto al polo improprio, invece, è l'equilibrio, comp. \perp a polo ma a $d = \infty \Rightarrow$ impone equilibrio a traslazione in dir. \perp a dir. di parallelismo (ex BC e DE sono in dir. opposte \Rightarrow solo fare l'eq. della traslazione verticale).

Struttura è esternamente isostatica quindi globalmente fare eq. globale cioè calcolare le reazioni esterne.

Considero struttura come un unico

corpo, 3 q. \rightarrow 3 eq. indep.

Vincolato esternamente.



10 · 3 10 · 3 3 · 10

$$Z_A = 10t ; Y_A + Y_D - 20 = 0 ; 12Y_D - 30 - 90 - 30 = 0 \quad \text{Quindi}$$

$$Y_D = 12,5t ; Y_A = 7,5t$$

Si impone l'eq. dei momenti rispetto ai 3 poli impropri.

$M_B) 10 \cdot 3 + 7,5 \cdot 3$ (N_{BC} e N_{BE} non danno contributo di momento, convergono in B)

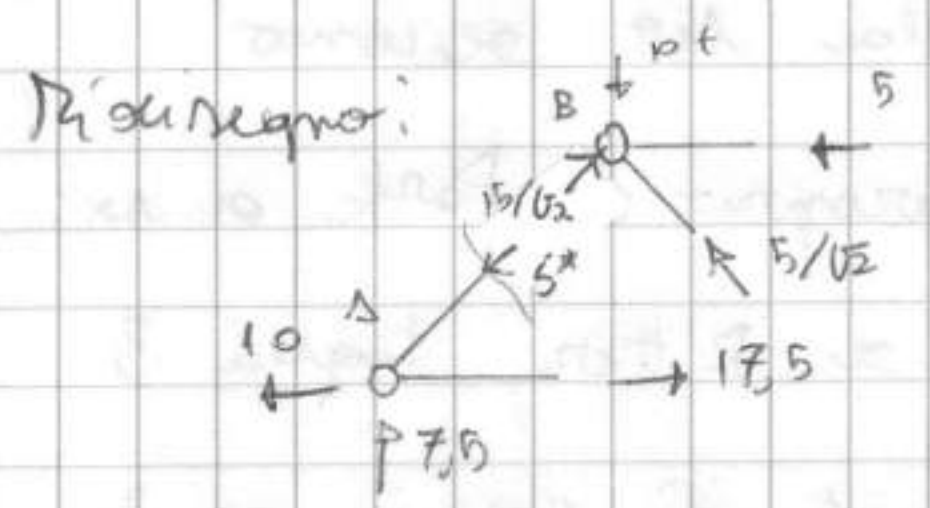
(c'è solo N_{BE} alla estremità della convergenza) $+ N_{BE} \cdot 3 = 0$

$M_E) 7,5 \cdot 6 - 10 \cdot 3$ (unico contributo è alla destra non conv. in E) $+ N_{BC} \cdot 3 = 0$

g) eq. alla dir. verticale, la dir. di // inno: $7,5 - 10$ (N_{BC} e N_{BE} non danno contributo, solo la proiezione di N_{BE}) $- \frac{N_{BE}}{\sqrt{2}} = 0$

Come incognita unica nell'eq. ho l'asta che non converge nel polo

Ottengo $\frac{N_{BE}}{L \text{ distanza}} = -17,5t$; $\frac{N_{BC}}{L \text{ distanza}} = -5t$; $\frac{N_{BE}}{L \text{ distanza}} = -2,5\sqrt{2} = 5/\sqrt{2}t$



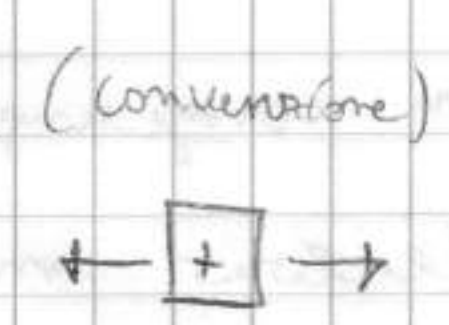
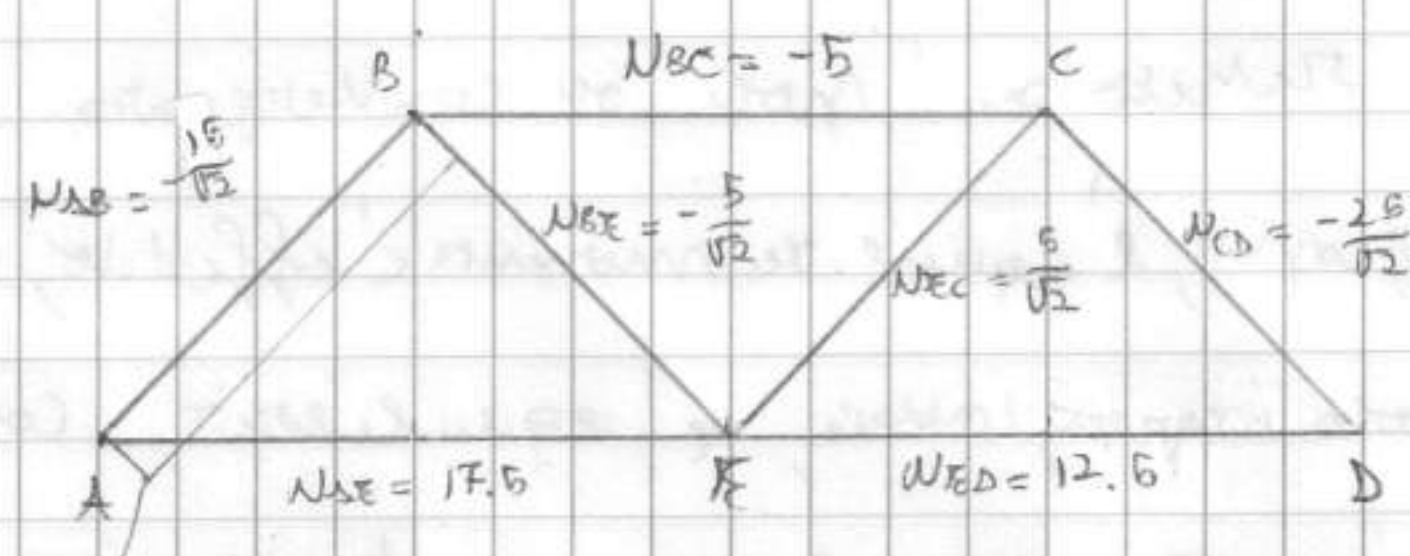
Ridisegno: Planca sollecitazione su AB. Si nota la struttura S^* : $\rightarrow N_{AB}$; \times Colloca N_{AB} barra fare eq. rispetto a dir. verticale o orizzontale. Ex

Verticale: $7,5 + \frac{N_{AB}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_{AB} = -15/\sqrt{2}$

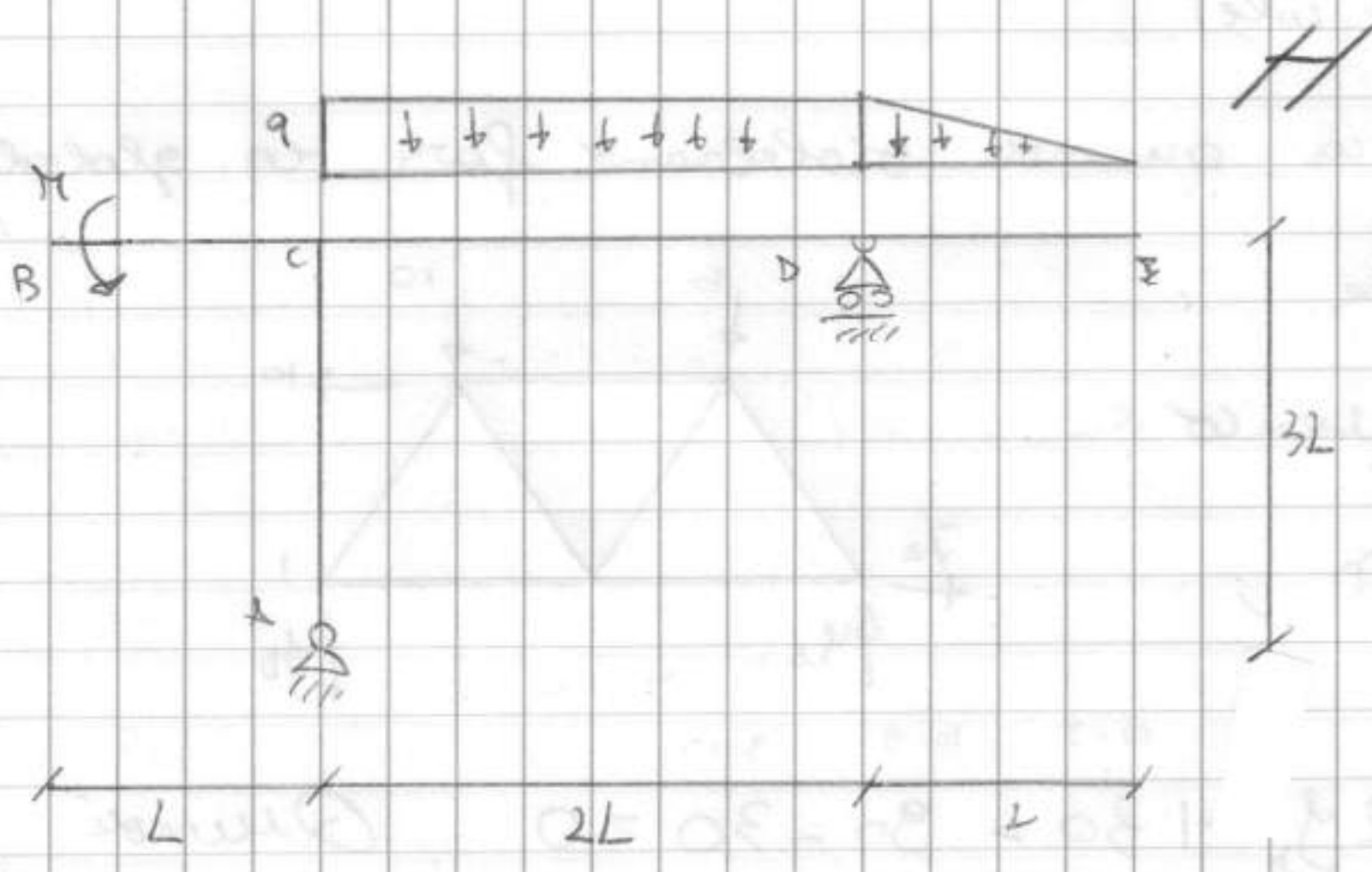
In S_2 è di nuovo simmetrico.

Risultato:

(N)



Al posto di fare il diagramma (ma che è f. costante) si mette l'asta il valore (ma è '-' e puntone)



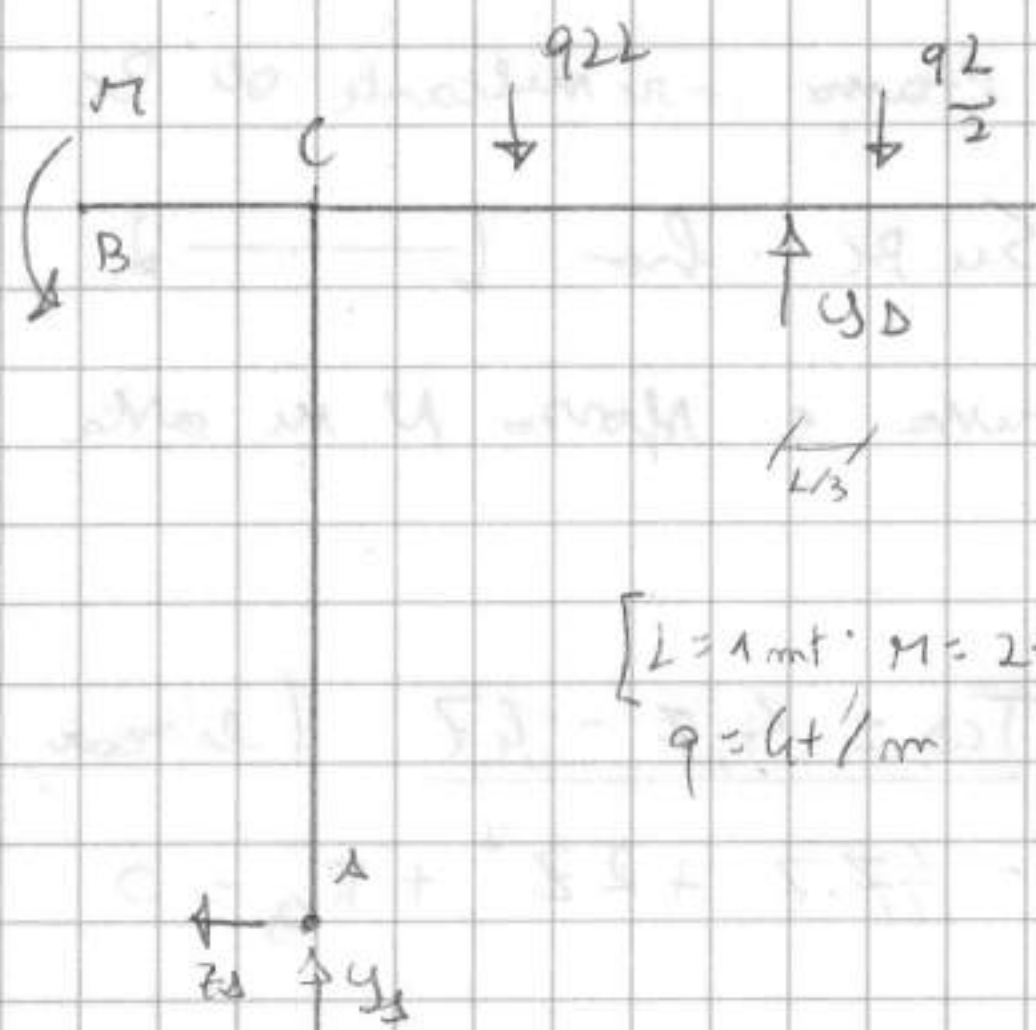
BCDE è con un unico corpo rigido, ipostatica, 3 g.d.l. (c'è H in B che - qua esterno p.to libero - non ha tutte le sollecit. interne nulle; invece E è estremo libero, molto dove } azioni

concentrate, quindi è tutto nullo. (c'è carico triangolare, quindi

su DE [D è continuità] c'è $qL/2$ applicato a $qL/3$ da D e

⑥ $q(x) = \frac{q}{L}x$



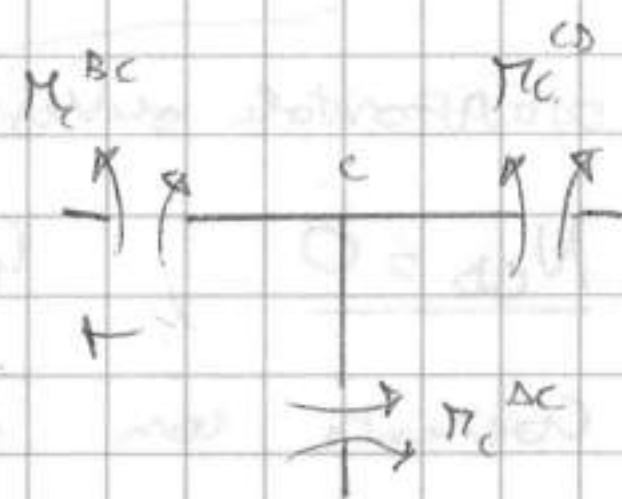


$$\begin{cases} L = 1 \text{ m} \\ M = 2 \text{ t.m} \\ q = 4 \text{ t/m} \end{cases}$$

Si considera separatamente x l'eq. globale da sur. del carico uniforme CD e la sur. " " triangolare DE.

In C c'è il nodo

TRIPLO. numero corp. + di equilibrio:



$$\boxed{M_{BC} = M_{CA} + M_{CD}} \quad \text{EQUILIBRIO DEI MOMENTI}$$

DEL NODO TRIPLO (1 componente delle forze maggiori delle altre due)

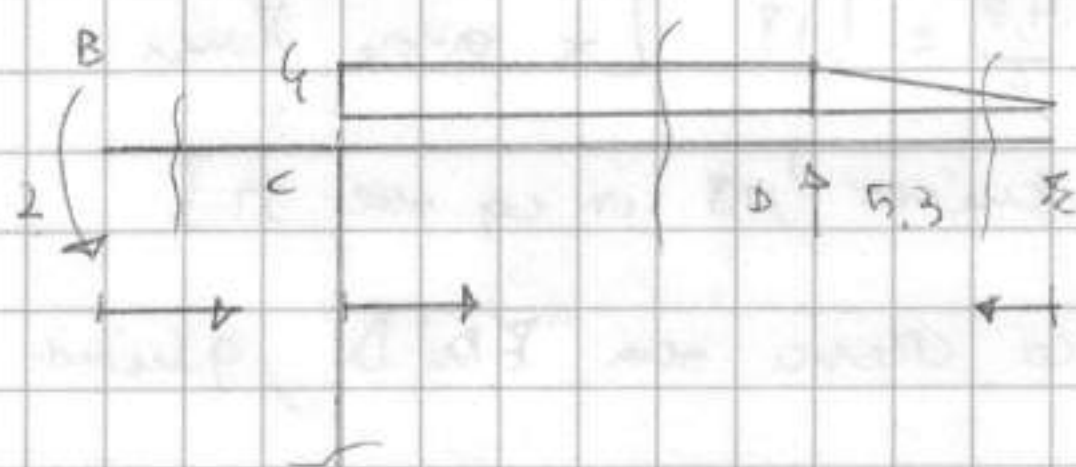
Sforzi di taglio in una vert. sono trasmessi in tutta tutta. Come sforzi normali.

[da struttura ieri]

24/1/06

$$\underline{Z_A = 0}, \quad Y_D + Y_B - 2qL - \frac{qL}{2} = 0 \quad \left[\begin{array}{l} \text{M. calcolato in A} \equiv \text{M. calcolato} \\ \text{in qualsiasi p.to t. AC} \end{array} \right] \quad \frac{M}{L} - qL + Y_D \frac{L}{2} - \frac{qL}{2} \left(2L + \frac{L}{3} \right) = 0$$

$$\underline{Y_D = \frac{13}{12} qL - \frac{M}{2L} = 5,3 \text{ t}} \quad ; \quad \underline{Y_B = 6,7 \text{ t}}$$



Prendiamo conv. q tratti.

Per l'eq del nodo triplo: il M è continuo.

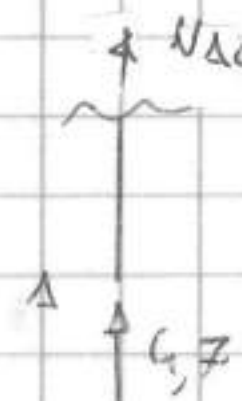
Sint. rif che parte da A x AC, in

B x BC, in C x CD, in E x DE.

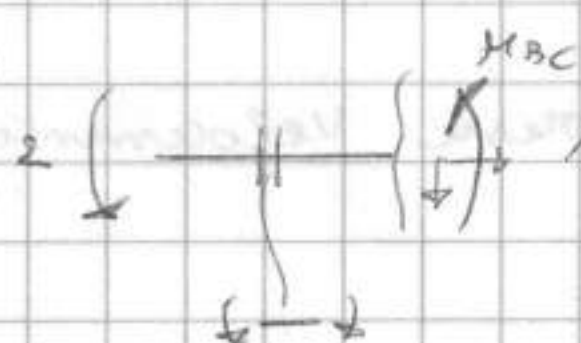
- AC: c'è solo M. normale

$$N_{AC} + 6,7 = 0 \rightarrow \underline{N_{AC} = -6,7 \text{ t}} \Rightarrow \text{se compressione}$$

Non ho F. che sia momento.



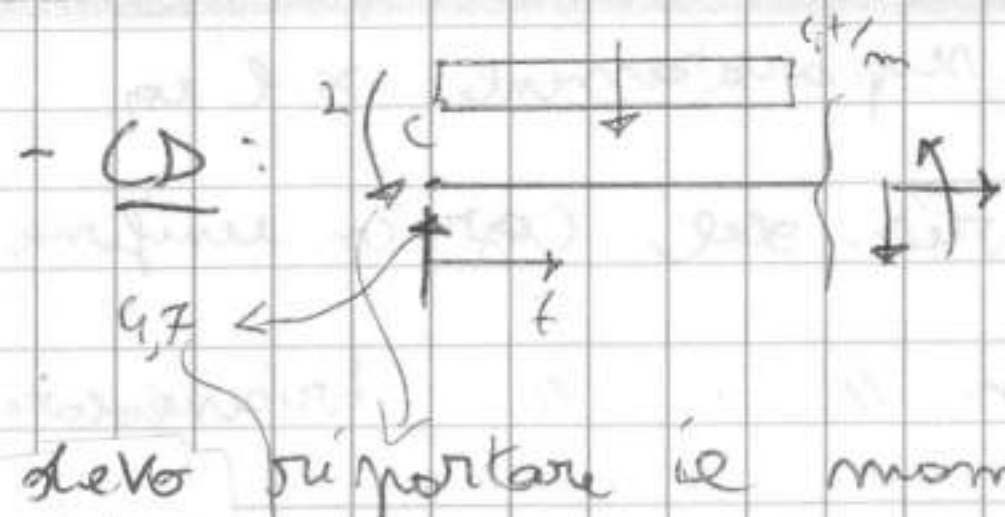
- BC:



guardando da sx a dx c'è solo M in B

$$\boxed{N_{BC} = T_{BC} = 0} \quad M_{BC} + 2 = 0 \Rightarrow \underline{M_{BC} = -2 \text{ t.m}}$$

(→)



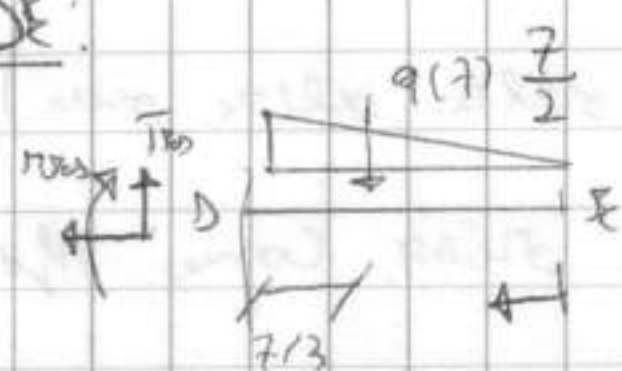
Converge alla del ramo + risultante di BC e parte di carico. Su BC ho $\left[\text{---} \right]$,

devo sopportare il momento. L'asta AC è compressa e porta N in asta orizzontale diventa un taglio.

$N_{CD} = 0$; $4,7 - q \cdot z - T_Q = 0$ quindi $T_{CD} = 4,7 - qz$ (lineare, coerente con presenza carico distribuito). $2 - 4,7 \cdot z + 2z^2 + T_Q = 0$

quindi $M_{CD} = -2 + 4,7z - 2z^2$

- DE:



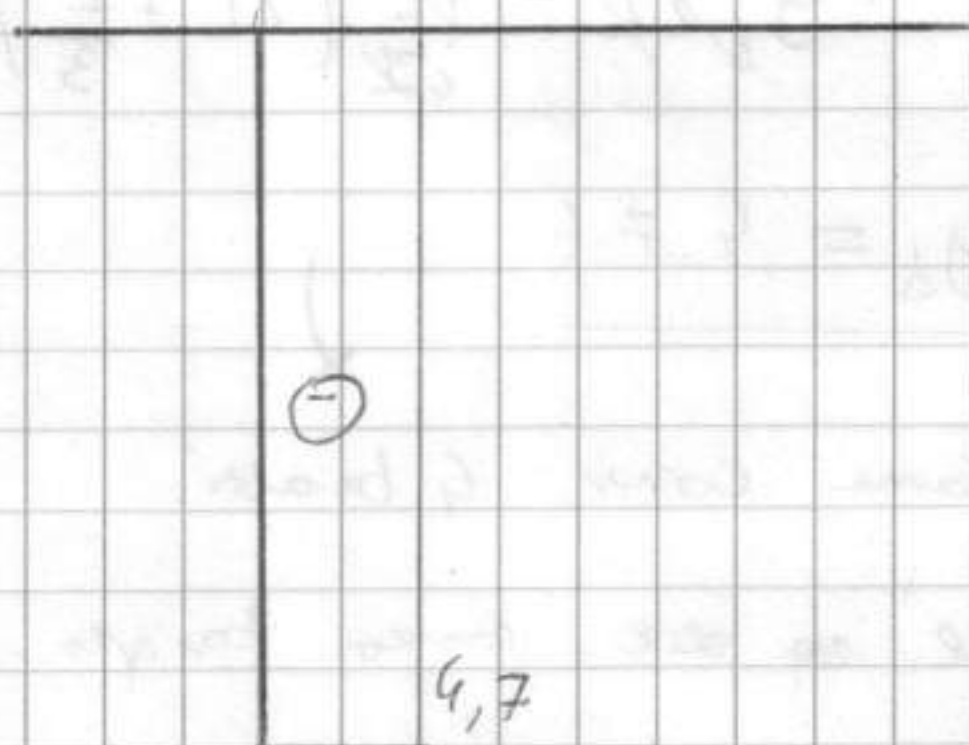
quando si va a dx

$N_{ED} = 0$; $q(z) = \frac{q}{L} z = qz$, quindi $q(z)z = 2z^2$ applicata in $z/3$ risp. a sezione (eq. momento

rispetto a $\left\{ \right\}$. $T_{ED} - 2z^2 = 0 \Rightarrow T_{ED} = 2z^2$; $M_{ED} + 2z^2 \cdot \frac{z}{3} = 0 \Rightarrow M_{ED} = -\frac{2}{3}z^3$

↓ Troviamo i diagrammi

(N)

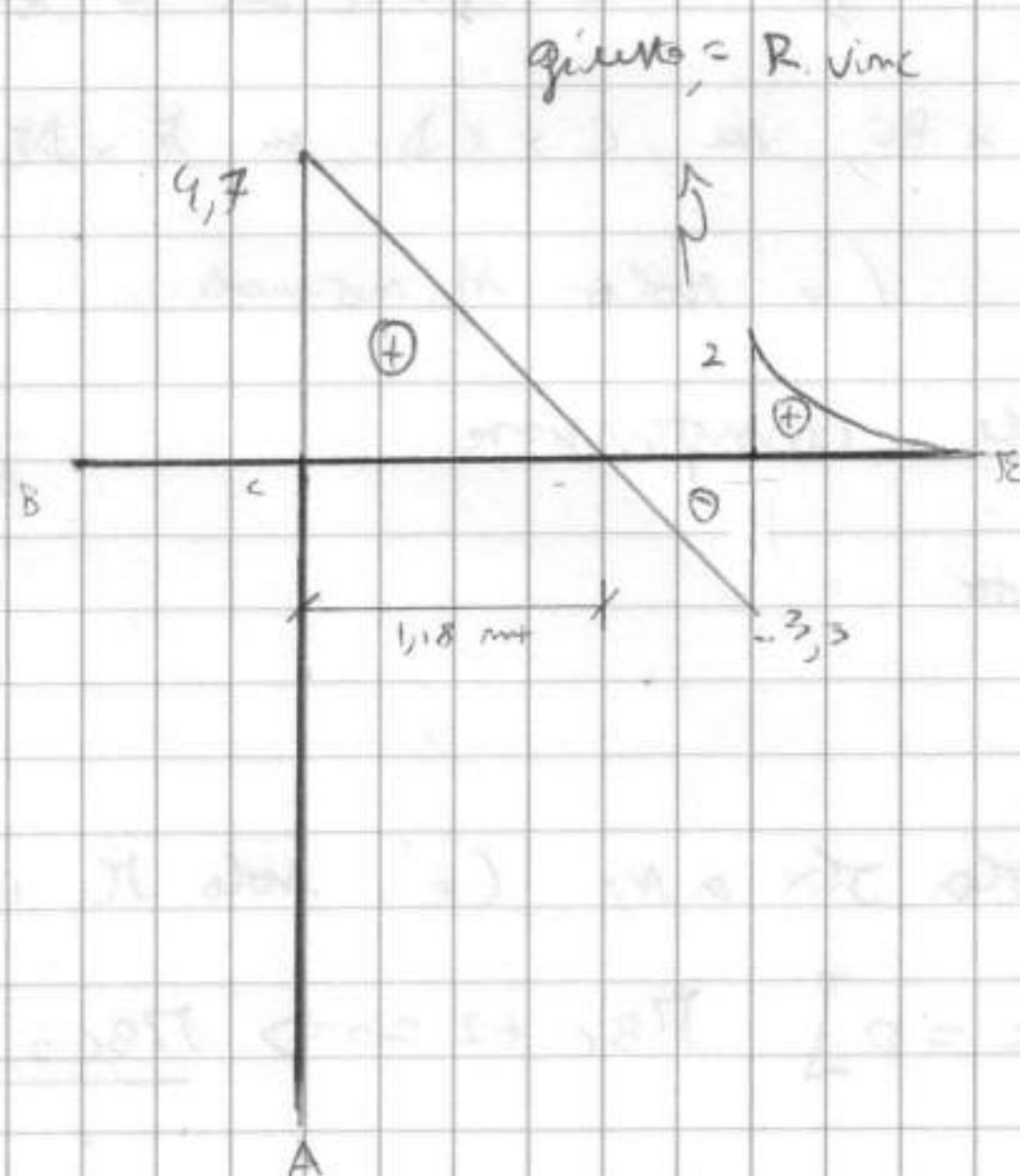


Per trovare il nullo del taglio, $T_{CD} = 0 \rightarrow 4,7 - qz = 0$.

$z = \frac{4,7}{q} = 1,18$ [x dove M max sostituisco 1,18 in eq. del M]

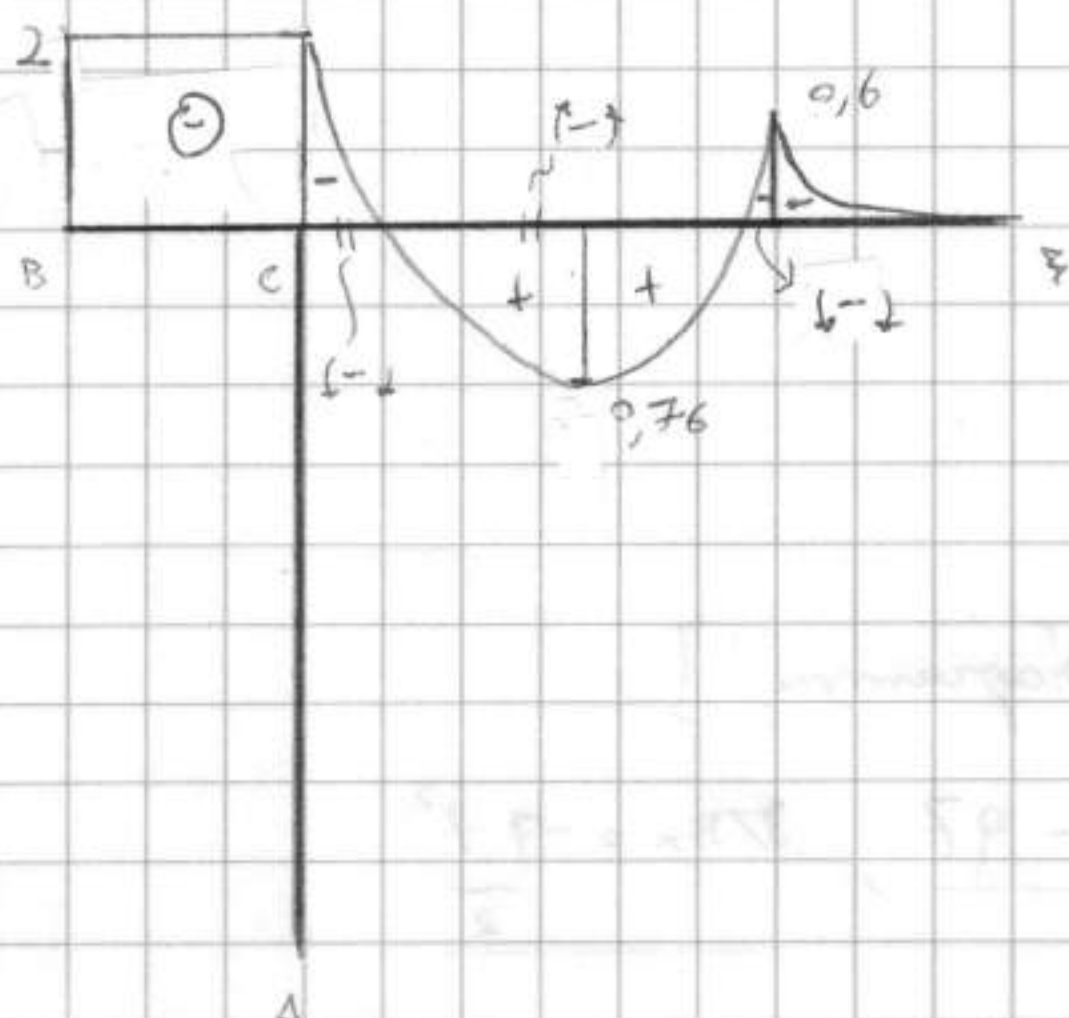
Carico verso sia E a D, quindi T ha conc. verso l'alto.

(T)



Su BC, $M \neq 0$ [costante], poiché equilibrio è $\left[\text{---} \right]$ parte terra è sopra, su CD è parabolico il M max. ; in 2L, $M = -0,6$. Per z piccolo M rimane negativo; nel nullo del T c'è min relativo. In ED, M scende velocemente, è una curva

11



H

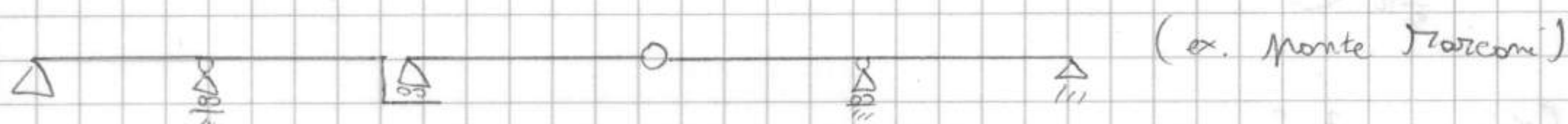
TRUSSE GERBER

Molto usate nei ponti

x assorbire i carichi

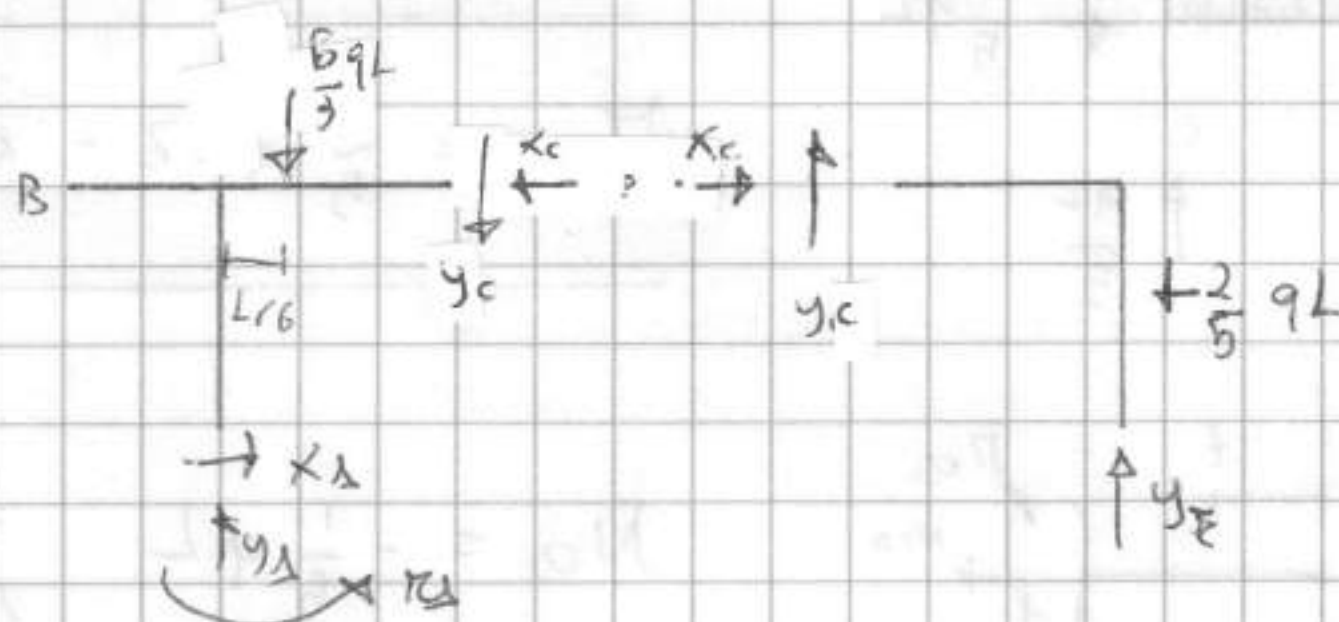
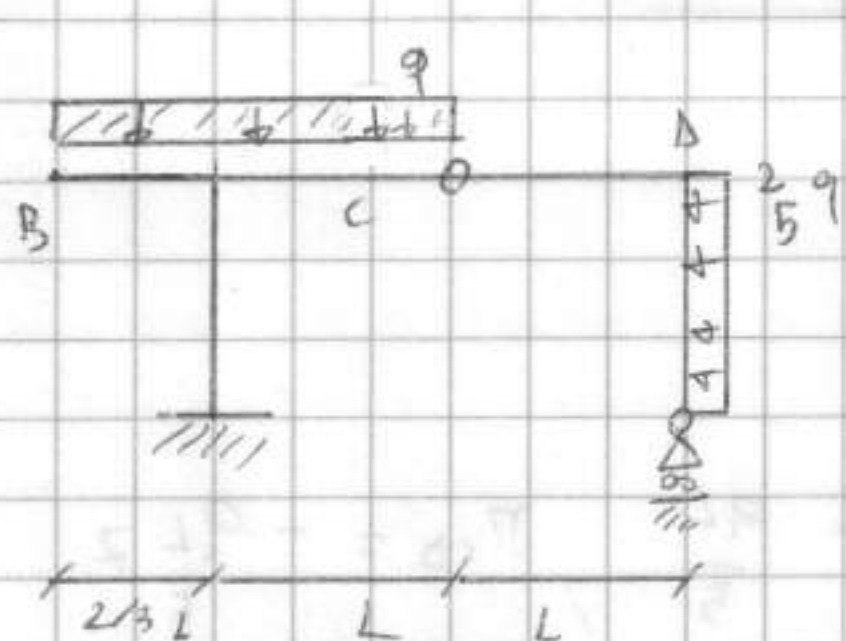
termici

Si usa anche:



(ex. Ponte Marconi)

26/1/2006



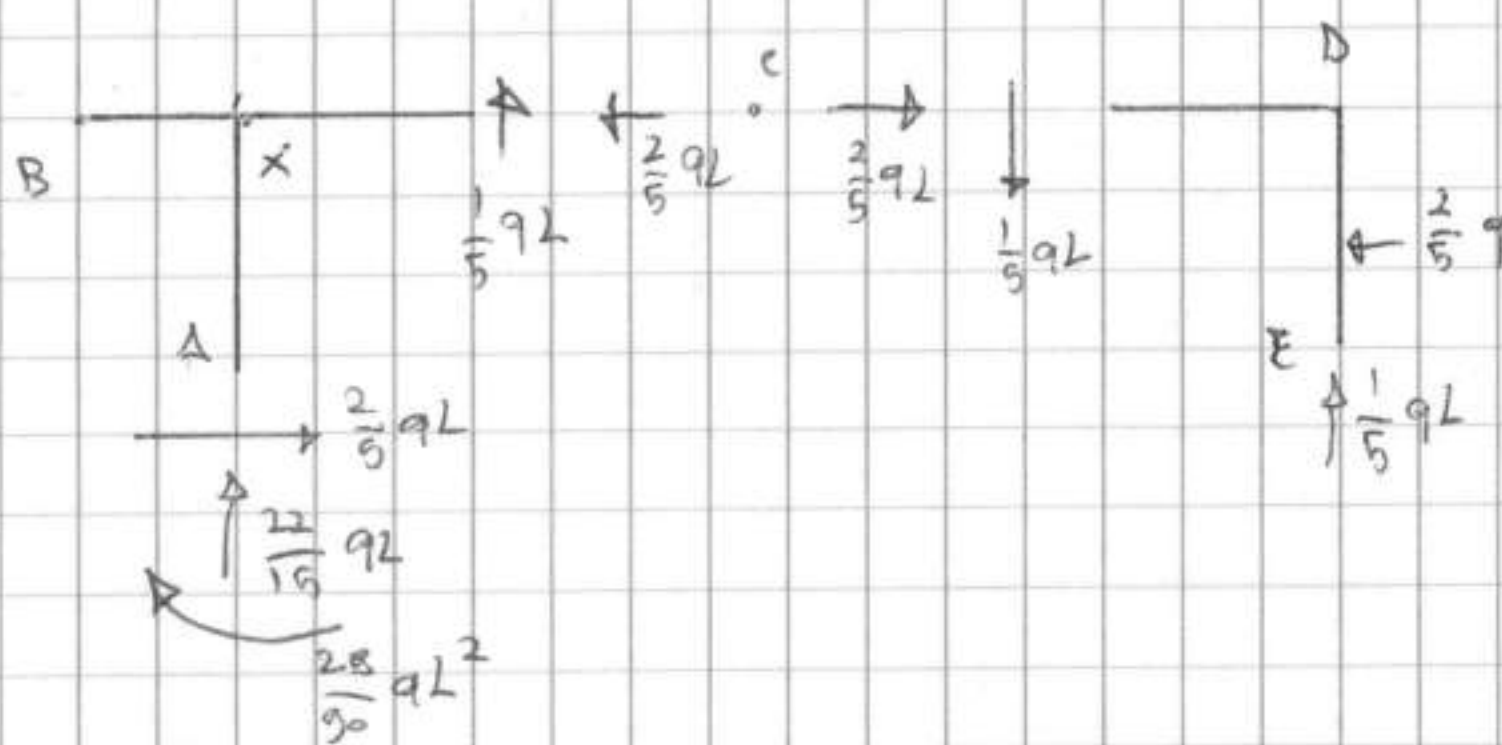
$$\textcircled{1} \sum x = 0; X_A = X_C; \sum y = 0; Y_A = \frac{5}{3} qL + Y_C; \sum M_A = 0: -Y_C L + X_C L - \frac{5}{3} qL \frac{L}{6} + M_A = 0$$

$$\textcircled{2} \sum x = 0 \rightarrow X_C = \frac{2}{5} qL; \sum y = 0 \rightarrow Y_E = -Y_C; \sum M_E = 0 \rightarrow \frac{2}{5} qL \frac{L}{2} - Y_C L - X_C L = 0 \Rightarrow X_A = X_C = \frac{2}{5} qL; Y_C = -X_C + \frac{2}{10} qL = -\frac{2}{5} qL + \frac{2}{10} qL = -\frac{1}{5} qL; Y_E = \frac{1}{5} qL; M_A = -\frac{1}{5} qL^2 - \frac{2}{5} qL^2 + \frac{5}{18} qL^2 = \left(\frac{-18 - 36 + 25}{90} \right) qL^2 = -\frac{29}{90} qL^2;$$

$$Y_A = \frac{5}{3} qL - \frac{1}{5} qL = \left(\frac{25 - 3}{15} \right) qL = \frac{22}{15} qL$$

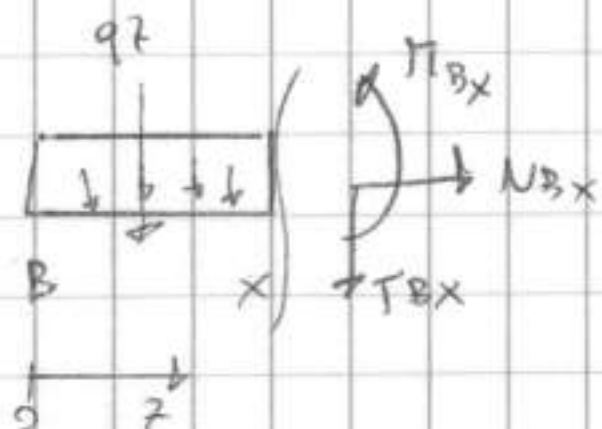
< Schema del corpo libero equilibrato;

49



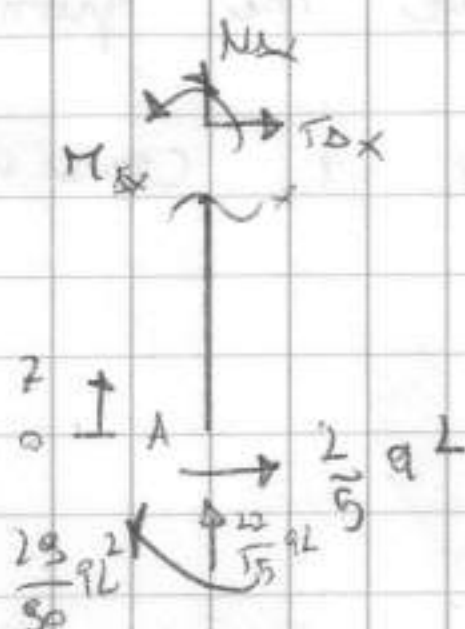
[Diagramme:]

BX:



$$N_{BX} = 0; \quad T_{BX} = -qz; \quad M_{BX} = -\frac{qz^2}{2}$$

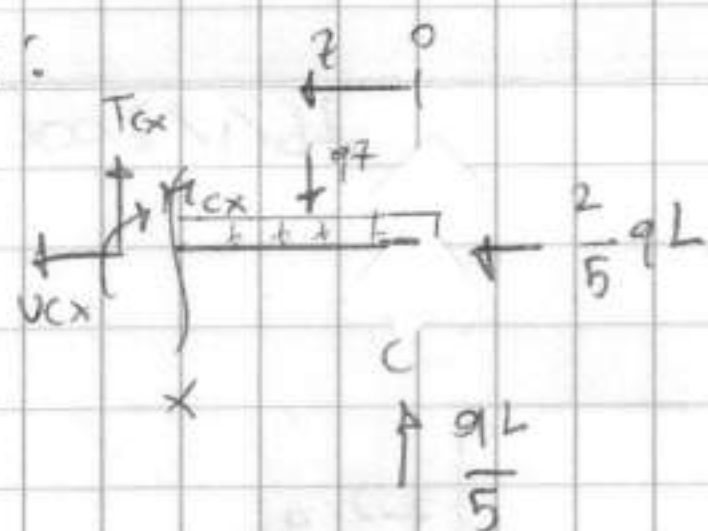
AX:



$$N_{AX} = -\frac{22}{15}qL; \quad T_{AX} = -\frac{2}{5}qL;$$

$$M_{AX} = +\frac{28}{30}qL^2 - \frac{2}{5}qLz$$

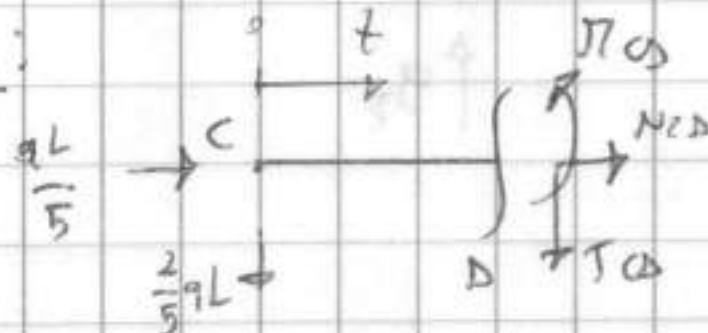
CX:



$$N_{CX} = -\frac{2}{5}qL; \quad T_{CX} = -\frac{1}{5}qL + qz;$$

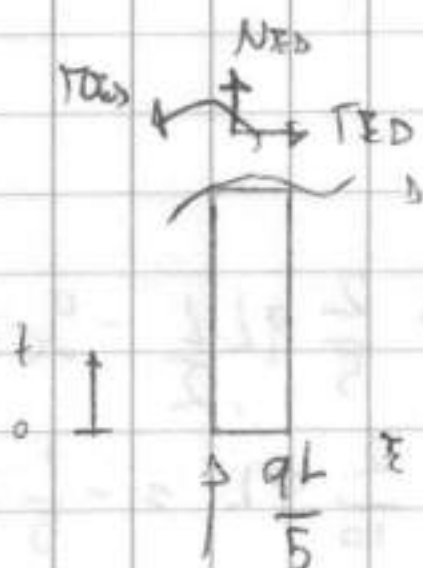
$$M_{CX} = \frac{1}{5}qLz - \frac{qz^2}{2}$$

CD:



$$N_{CD} = -\frac{2}{5}qL; \quad T_{CD} = -\frac{qL}{5}; \quad M_{CD} = -\frac{qLz}{5}$$

ED:



$$N_{ED} = -\frac{qL}{5};$$

$$T_{ED} = \frac{2}{5}qz$$

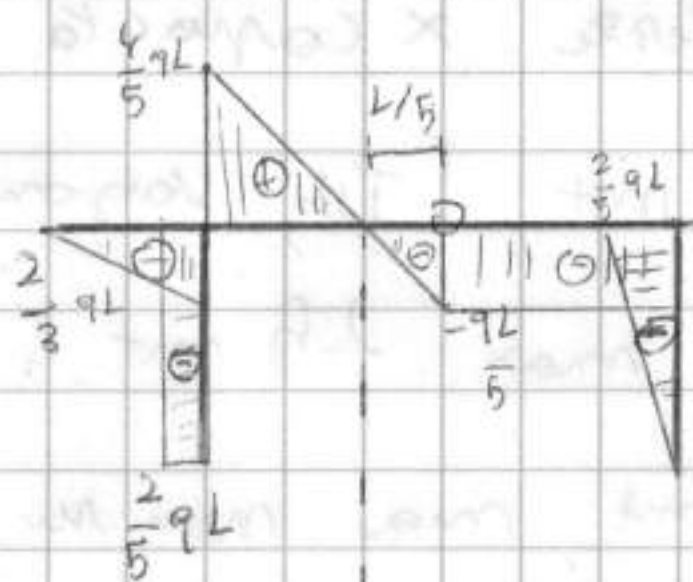
$$M_{ED} = \frac{1}{5}qz^2$$

(Diagramme →)

(N)



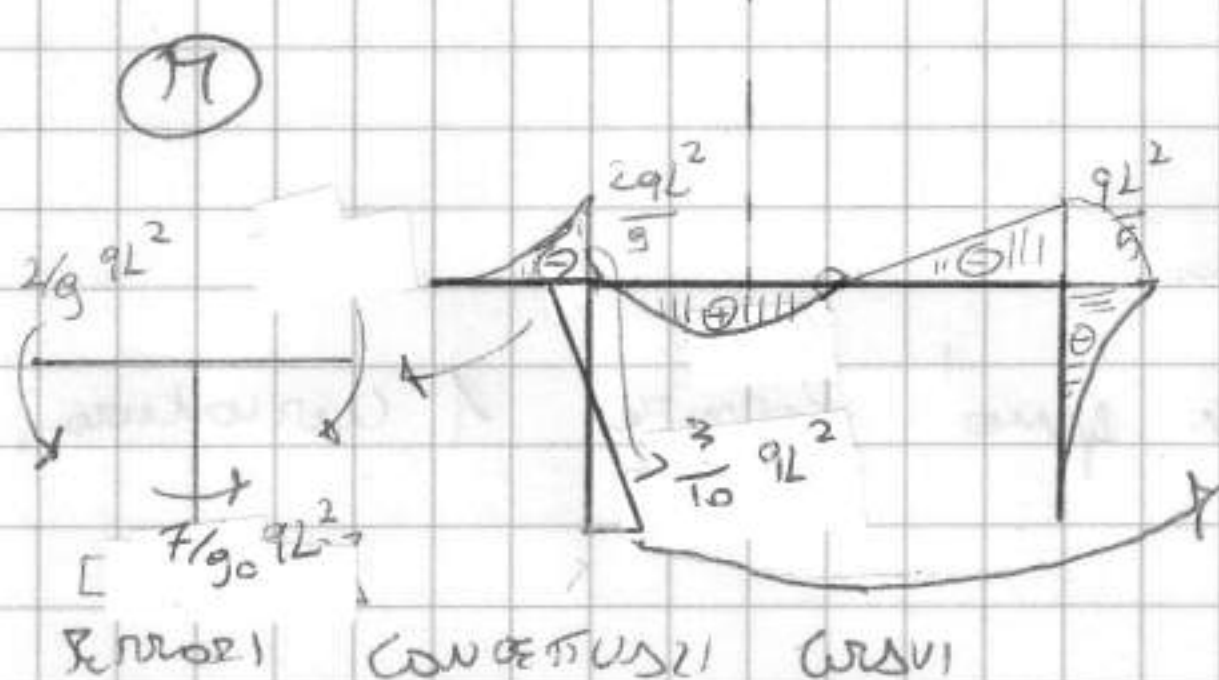
(T)



Nella discontinuità (x) si deve verificare che il salto del taglio \equiv reazione vincolare Verticale \equiv salto normale alla Ax.

Poniamo $T=0$ in x e trovare nullo. $\left[T = \frac{2}{5} qLx \right]$

(M)

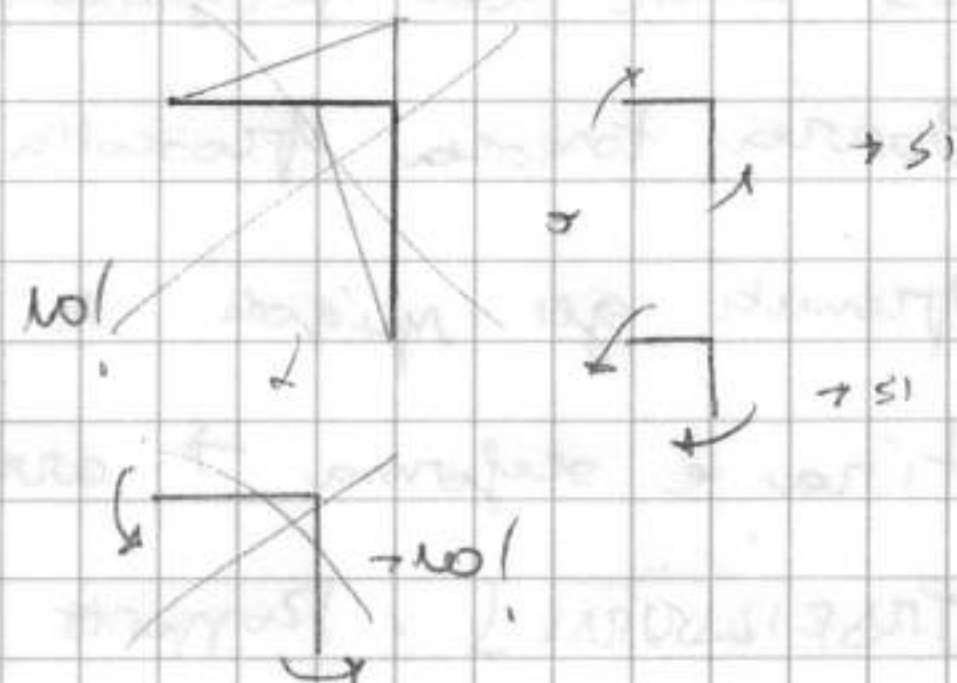


nel nodo si ha $\frac{qL^2}{5}$

In A per la T, poi per la T e cambia segno

ERRORI CONCRETI GRAVI

Equilibrio: non può esserci la struttura dove non c'è equilibrio. Momenti in corniera e/o in estremità libera dove non ci sono F concentrate \neq da 0, nostra struttura non equilibrata sono ERRORI GRAVI!



REQUISITI DA COSTRUZIONE (EN 12518)

30/1/06

ACCIAIO: tra i + diffusi; anche accoppiato con calcestruzzo o in strutture miste. / CALCESTRUZZO

Materiali murari (in ristrutturazione)

ACCIAIO e lega dove Fe è prevalente. Quello + diffuso è quello a carbonio che C è 2° in quantità (ma max. 1%) + altri elementi + ossigenati

Nasce alla fine del '700 [riv. industriale] con la capacità di realizzare forni adatti. Lega in crogiolo o fusione (51)

e trattati 2 metodi di trattamento; \times con altri sono lunghi \Rightarrow non si raffredda tutto ma è mandato in laminazione continua, raffreddato e poi punato e avvolto da Σ di rulli (+ largo, lunga e profonda).
 Proc. Merco avviene separatamente; lingotto portato in un'altra parte, si si-ricolcola e lo si tratta (ora c'è risparmio). Prodotto finale è "Pisto" d'acciaio. Elementi tagliate in lunghezza \times capacità di trasporto. L si profila; barre \times cm = 12 mt [T12, vagoni ferroviari, non è richiesto il trasporto eccezionale] \rightarrow max. 25 mt. Se avviene in ferrovia e in mare può arrivare a 25 mt, ma non in strada. Con acciaio e caratt. meccaniche d'alta qualità e qualità dei trattamenti. + se ne fanno e + non sono meglio e'.


Lo stesso \times i profilati, fatti \times rullatura. Con outers W dei rulli sup. e inf. \times può fornire 1 curvatura. 2 curvatura solo \times stampaggio.

C'è anche la piegatura a freddo di piatti. Barra tonda prodotta da rulli di prima producono \square , poi premuti gli angoli si ha ottagono infilato in buco tondo che tira e si deforma \rightarrow arrotondata e diminuita di diametro [DUE \rightarrow TRASPILATURA]. Rapporto tra ingresso e uscita $\approx 3 \div 4$ volte.

Nel raffreddamento si forma struttura irregolare (ma non tanto, 1:20) \rightarrow si forma policristallina. Raffreddamenti lenti portano a cristalli + grandi e regolari. Poi nella trafila cristalli possono essere rotti, distacchi e sinteramenti. Se è troppo violento potevano esserci delle discontinuità. Oggi non si possono fare previsioni precise di resistenza \times la della completezza.

Prova di Tensile; man mano che si allontana barra si allontanano le manovre il pezzo; c'è effetto

locale con $\sigma_{ur} = 0$. Allontanandosi e risultante

(52) e nel baricentro.  (Messa normale)



53

k è parametro non variabile al solo da Fe [temperatura al 98%], α da processo meccanico.

Altro parametro è il livello di forza dove inizia lo SNERVIAMENTO [F_s] \times necessità e inoltre il parametro di COLLASSO [F_c , di rottura].

È importante anche ΔL_c perché un materiale che si rompe appena dopo F_s è PERICOLOSO \Rightarrow fragilità / utilità. \times lo stesso materiale [rottura] $<$ \times ΔL $<$. Noi vogliamo massima sutilità.

$\Delta L_n \approx 2-3\%$; $\Delta L_c \approx 10-30\%$ \rightarrow parametri variano perché -

a contrario rigidità - sono definiti dal processo di produzione.

Cristalli + piccoli ^{\rightarrow importanti trattamenti meccanici} e regolari \neq resistenza materiale. Numero dei

processi termomeccanici ^{\rightarrow piccoli} migliora la qualità.

Acciaio + resistente è + fragile e - duttile.

FINE I PERIODO (30/1/06)

- 55. PROVA A TRAZIONE / SNERVAMENTO
- 56. PERCENTUALE DI DEFORMAZIONE / MODULO DI YOUNG / LEGGE DI HOOKE
- 57. DUTILITA'
- 58. RIGIDITA' / EFFETTO POISSON
- 61. MECCANICA DEI SOLIDI (DEFORMABILI)
- 62. SOLIDO DI CAUCHY / TENSIONE MEDIA (L e $TAV.$)
- 64. EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO PER IL SOLIDO
- 66. RECIPROCA' REAZIONI TANGENZIALI / CINEMATICA DEI CORPI DEFORMABILI
- 67. DEFORMAZIONE (LONGITUDINALE E ANGOLARE) / STATO PIANO DI TENSIONE
- 69. CIRCONFERENZA DI MOHR
- 70. CONGRUENZE DEL SOLIDO DI CAUCHY
- 74. MODULO DI ELASTICITA' TRASVERSALE
- 75. TEORIA DELLA TRAVE S. VENANT
- 79. GEOMETRIA DELLE AREE - MOMENTO STATICO - D'INERZIA
- 80. CASI BASE TRAVE S. VENANT - TRAVE SU SUOLO ELASTICO
- 82. 1° CASO DI S. VENANT: SFORZO NORMALE
- 84. TEOREMA DEL TRASPORTO PER IL MOMENTO D'INERZIA
- 88. 2° CASO DI S. VENANT: FLESSIONE SEMPLICE RETTA
- 90. FORMULA DI NAVIER
- 91. PROFILATI DOPPIO T. IPE - HE
- 92. MODULO DI RESISTENZA A FLESSIONE
- 93. TEORIA DI TIMOSHENKO
- 94. TEORIA DEL TAGLIO DI JOURAWSKI
- 97. PREDIMENSIONAMENTO SEZIONI
- 98. MODULO DI RESISTENZA A FLESSIONE / VERIFICHE DI RESISTENZA

100. METODO DEGLI S.L.U.

101. CRITERI DI RESISTENZA - DI NAVIER

102. PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

103. TEOREMA DI CLAPEYRON / CRITERIO DI BELTRAMI

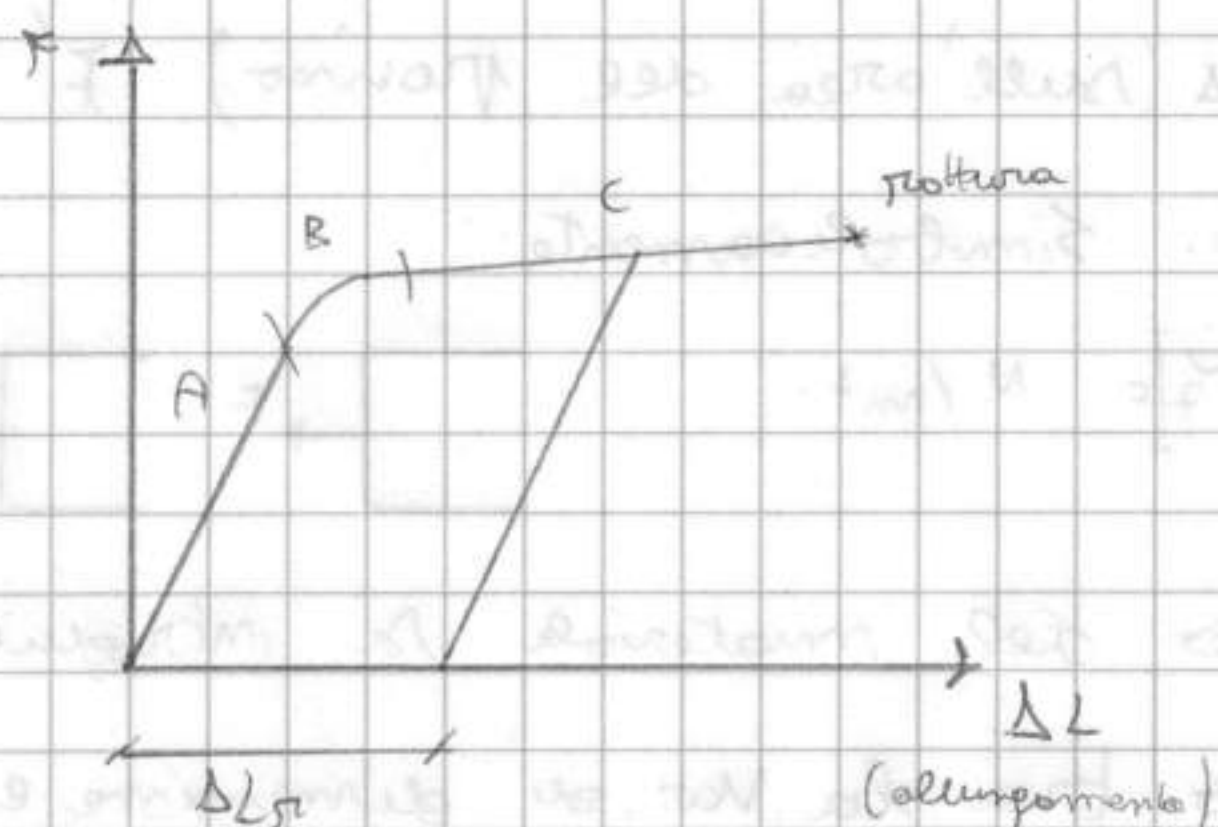
104. CRITERIO DI VON-MISES / LAVORO DI DISTORSIONE


108. CALCOLO SPOSTAMENTO TRAVI INFLESSE / CURVATURA / RIGIDEZZA FLESSIONALE

109. EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA

114. [ESERCIZIO]

di trazione o compressione.



→ Prova a trazione di un elemento in acciaio a sezione circolare  lungo L.

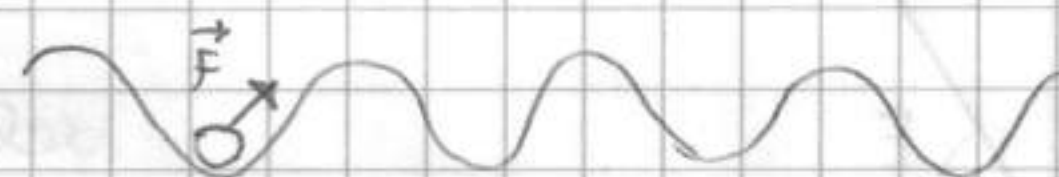
Il grafico presenterà i tratti:

- A: comportamento elastico e proporz. tra forza e allungamento (prova sottoposta a forte riarquinta - tolta la F - la sua geometria iniziale)

- B (breve), comportamento elastico, ma non c'è proporzionalità tra F e ΔL . Variazione non significativa del reticolo cristallino.

- C: deformazione permanente e scorrimento tra reticoli cristallini, equilibrio INSTABILE, c'è uno SVERVAMENTO del materiale.

(sistema meccanico di equilibrio stabile):



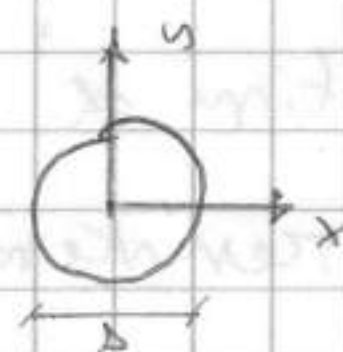
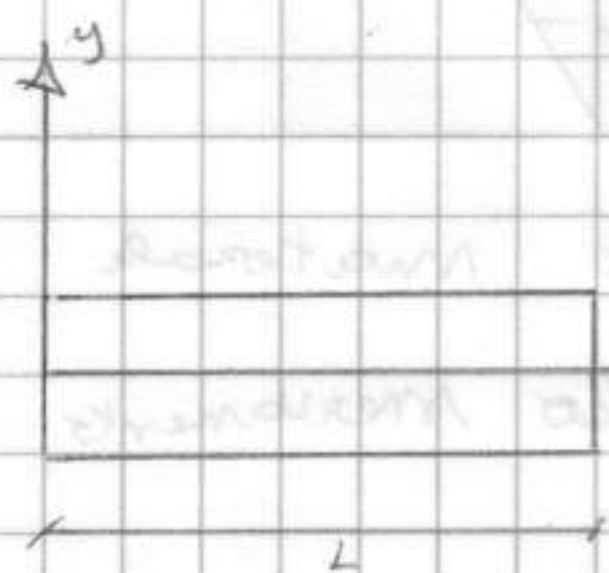
Applico forza, c'è sintonia posizione ma

rimane nella conca (comp. elastico) → tratto A-B.

Se $F > e$ / da far passare palla oltre la cima anche le altre caratterizzano e con via. Se tolgo la F, la palla rimane nella conca dove ho levato F, quindi c'è una def. permanente, un allungamento residuo ΔL_r (tratto C).

Forza e allungamento α non solo delle caratteristiche meccaniche del materiale, ma anche delle dimensioni del provino. → la prova in laboratorio non è immediata, rappresentativa del comportamento del materiale. → per capire la sola parte rel.

al materiale si fissa un nit. rif. sul provino e si introduce una nuova incognita. → la "F" si trasforma in grandezza = rapporto tra F e la dimensione (area)



del prossimo. $\frac{F}{A}$ è INDIPENDENTE dalle dimensioni (se prossimo raddoppia, F_A raddoppia la metà), rappresenta il "integro" del materiale. Valore medio sull'area \rightarrow è detta TENSIONE MEDIA (sull'area del prossimo). È grandezza vettoriale con dir. E dir. forza. Simbolicamente:

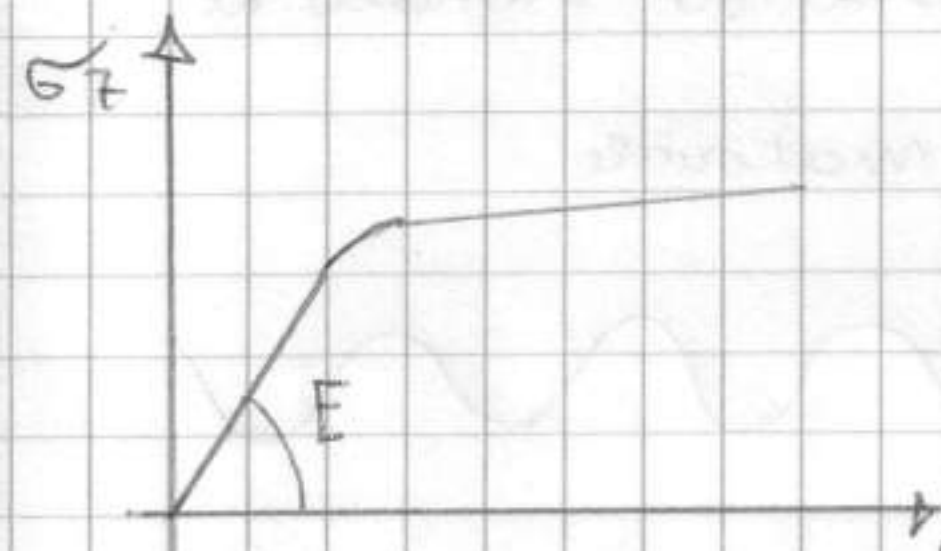
$$\vec{\sigma}_z = \frac{\vec{F}}{A} \rightarrow \perp \text{ all' } A \text{ dove agisce } F. [\sigma_z] = \text{N/m}^2$$

(TENSIONE NORMALE)



Per rappresentare meglio il comportamento del materiale si introduce la PERCENTUALE DI DEFORMAZIONE $\hat{=}$ Rapporto tra la var. di dimensione e dimensione iniziale: $\epsilon_z = \frac{\Delta L}{L}$ (numero puro). È def. media (non rappiamo se parte si è allungata + o - di un'altra). Allungamento è \approx qualche per mille (1-2 ‰).

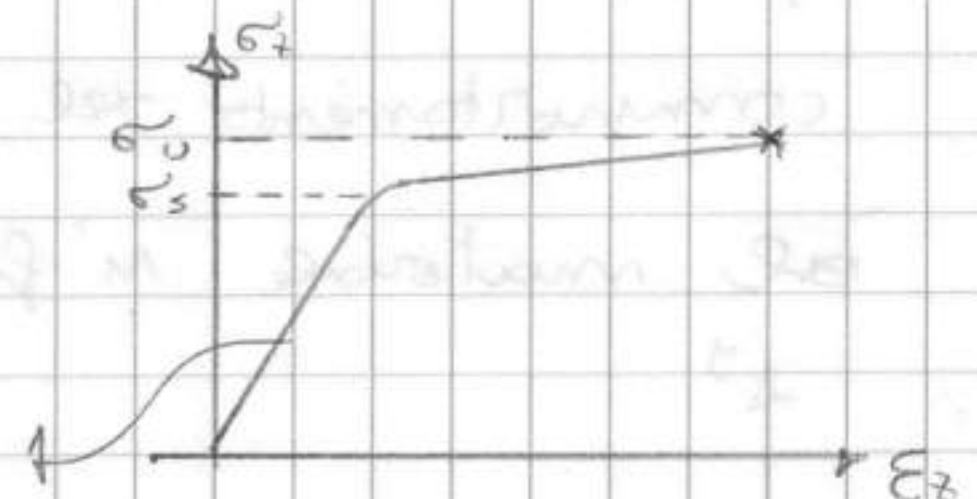
Graficabile si ha quello iniziale, però ora il grafico è INDIPEN-
DENTE dalle dimensioni del prossimo e invece
DIPENDE solo dalle caratteristiche meccaniche
del materiale. Inclinazione della retta



ϵ_z iniziale è sempre la stessa \forall acciai (com-
portamento campo elastico lineare iniziale \propto solo delle caratteristiche
del legame interatomico del ferro e non dei processi evolutivi). L'angolo
è indicato con "E" = coeff. di elasticità o c.d.e. longitudinale o
MODULO DI YOUNG. Si ha quindi la LEGGE DI HOOKE: $\epsilon_z E = \sigma_z$

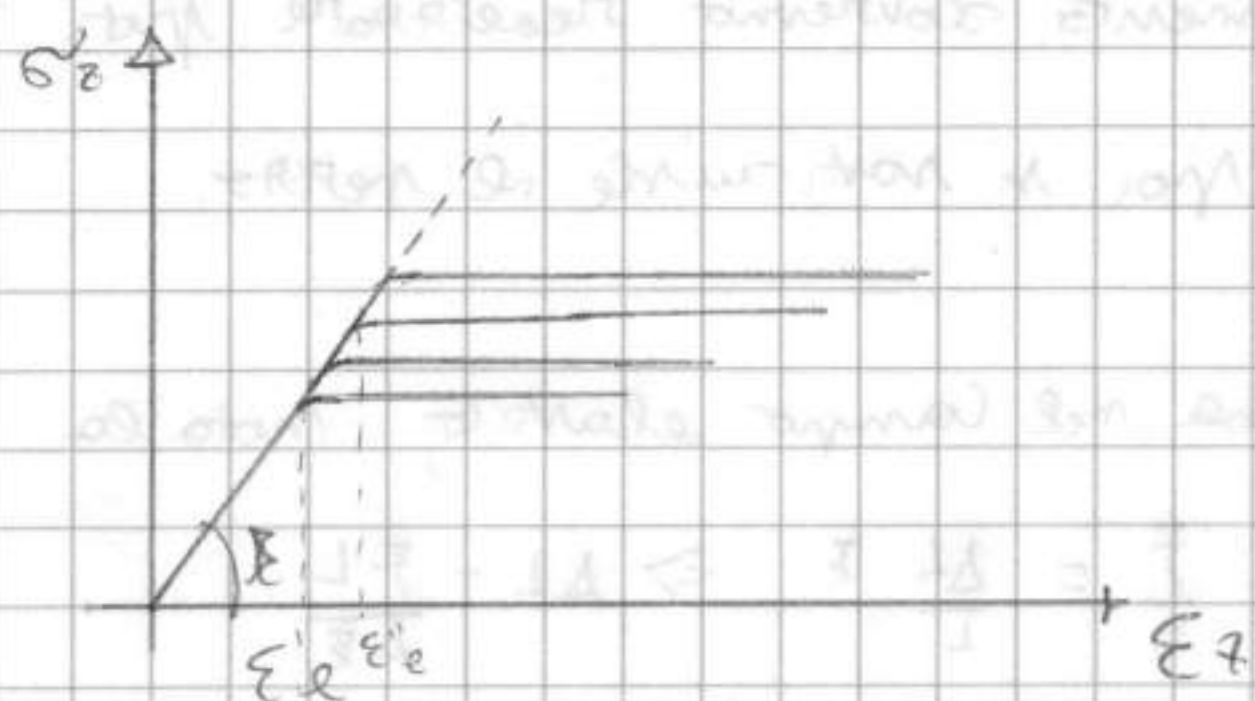
Valida solo nel campo elastico. (x è acciaio $E = 21000000 \text{ t/m}^2$).
Cio' che cambia tra i vari tipi d'acciaio è il livello al quale
avviene la plasticizzazione (meramente) σ_s : TENSIONE DI SUEVAMENTO (alla
quale iniziano il comportamento con deformazioni permanenti). Varia a
seconda del tipo di lavorazione. Lo stesso

vale per il punto di rottura: σ_u = TENSIONE
DI ROTTURA (legame costitutivo del materiale)



Per <> tipi d'acciaio si ha la stessa E, ma ex. materiale

⑤ + periferente ha ramo elastico + lungo e lo meramento



inizierà ad un livello σ alto, e
 così via, a seconda del processo di
 produzione. Cambia quando nella
 lega ci sono quantità significative di
 altri elementi. Se ci sono grosse

percentuali ($\approx 20\%$) di Ni o di Nichel si ha variazione di E , che non cambia se consideriamo l'acciaio al carbonio.

Curve hanno panni tutti di diversa lunghezza \rightarrow all'aumentare
 della resistenza (σ_u) non può che diminuire la DUTILITÀ del materiale.

Duttilità: rapporto tra la deformazione alla quale avviene il 1°
 snervamento ($\epsilon_e^{\text{elastico}}$) e la tensione alla quale termina il com-
 portamento elastico ed inizia lo snervamento. Se con la tensione \equiv
 rottura del pezzo $\rightarrow \epsilon_u$ = deformazione ultima, la duttilità è
 proprio $\frac{\epsilon_u}{\epsilon_e}$. Comportamento + duttile \rightarrow il rapporto è elevato, abbiamo
 allungamenti notevoli; Comportamento + fragile, c'è allungamento
 modesto e si rompe prima. $\frac{\epsilon_u (\%)}{\epsilon_e (\%)} \approx$ stime sulle curve! Perché?

- 1) Materiali in laboratorio, per diventare barra o profilato non deve
 essere fragile
- 2) I tipi di lavorazione che in zone limitate devono superare il
 limite elastico (ex. tagli, perforazioni)
- 3) Possono esserci diversi "incidenti" ad ex. nel trasporto, nel
 montaggio, nella messa in opera. Urti, cosute, urti tra profilati
 portano piccole deformazioni ma ^{l'acciaio} è integro e utilizzabile (oppure: VETRO)
- 4) I delle situazioni dove è difficile mantenere il limite elastico
 durante la vita di esercizio. Si progetta sempre struttura col
 funzionamento nel campo elastico nelle normali cond. di esercizio,
 ma a volte x carichi eccezionali ciò è difficile. Si accettano quindi
 delle deformazioni ma non la rottura. ex. guard-rail. Se

Canion urta e volentieri mantenere funzionamento sostenuto realizzabile prot. gigantesco (> costi!) si accetta la deform. e poi si sostituisce il pezzo.

Se vogliamo sapere quanto si allunga materiale nel campo elastico, nota la F. applicata, area, l. iniziale ed E, si ha $\frac{F}{A} = \frac{\Delta L}{L} E \Rightarrow \Delta L = \frac{F L}{A E}$

$> F$ e/o L , $> E$ ΔL , $> A$ e $< \Delta L$

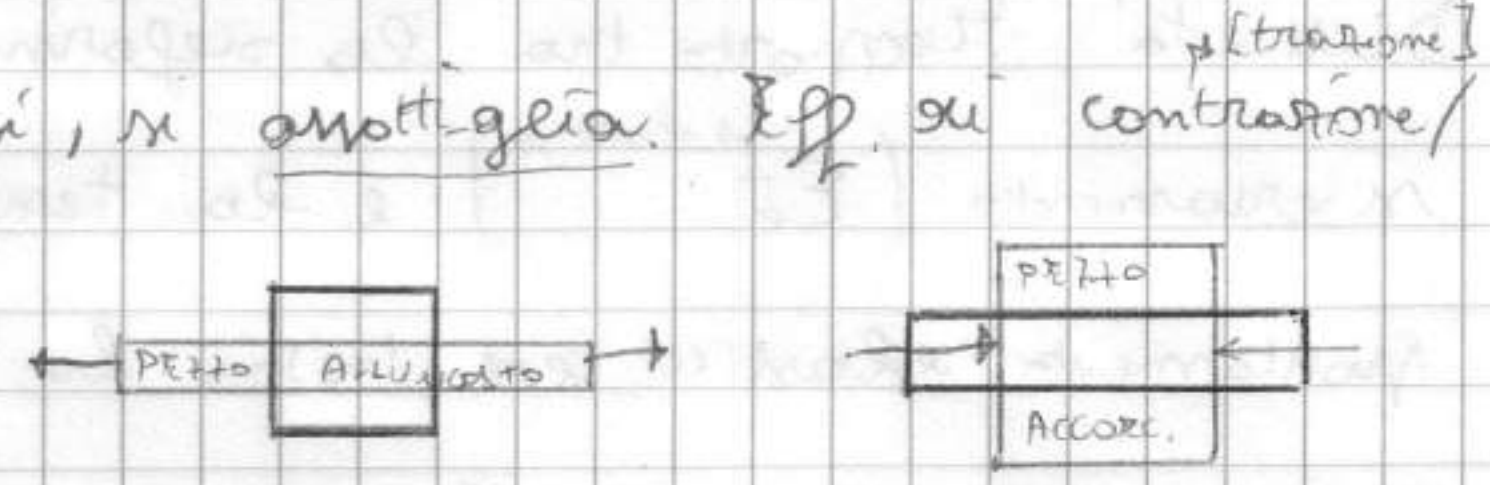
- $E \equiv$ RIGIDEZZA MATERIALE ($E > \Rightarrow < \Delta L$, ex. calcestruzzo ha $E \approx \frac{1}{10} E_{acciaio}$)
- $\frac{L}{A} \equiv$ RIGIDEZZA dovuta alla GEOMETRIA della struttura

Manca ancora qualcosa a definire bene comport. materiale (Studi nel '800, neg. in FRANCE)

EFFETTO POISSON

Oggetto in trazione oltre ad allungarsi, si assottiglia. Eff. di contrazione/ dilatazione laterale.

Oltre alla variazione di dir. primaria,



Anche in assenza di F in altre direzioni sono presenti delle def. SECONDAE

lungo gli altri assi: $\frac{\Delta D_x}{D} = \epsilon_x$ e $\frac{\Delta D_y}{D} = \epsilon_y$. Oltre quindi alla deformazione primaria ($\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$)

ho anche in campo elastico delle deformazioni secondarie che sperimentalmente sono d. a quella primaria.

$\epsilon_x = \epsilon_y = -\mu \epsilon_z$ COEFFICIENTE DI POISSON

(x indicare che le def. 2°arie sono opposte all'allungamento. Se ad ex. ϵ_z si allunga, ϵ_x e ϵ_y saranno di contrazione)

μ del MATERIALE

Contr. Volume provino soggetto a trazione. (ex. barra acciaio rettangolare)

$V_{(iniziale)} = a \cdot b \cdot L$. Le volume variata:

$$\left. \begin{aligned} L' &= L + \Delta L = L + L \epsilon_z = L(1 + \epsilon_z) \\ a' &= a + \Delta a = a + a \epsilon_x = a(1 - \mu \epsilon_z) \\ b' &= b + \Delta b = b + b \epsilon_y = b(1 - \mu \epsilon_z) \end{aligned} \right\} \text{Facciamo il prodotto di tutti i termini}$$

Ho $V' = V + \Delta V = L' a' b'$. Si trascurano tutti i termini dove compare 2 volte ϵ_z poiche' son molto + piccoli di quelli dove c'e' 1 volta sola ($\epsilon_z \approx 1\%$). C'e' anche un ultimo $\epsilon \cdot \epsilon \cdot \epsilon$ (particolarmente piccolo). Resta:

58) $V' - V = \Delta V = V(1 - 2\mu) \epsilon_z$. Quindi si ha un incremento di

Volume se $1-2\mu > 0$ quindi se $\mu < 0,5$ (e quindi diminuisce se $\mu > 0,5$). Se $\mu = 0,5$ vuol dire che non c'è variazione.

In campo elastico x tutti i materiali da costruzione, da osservazioni sperimentali $\mu < 0,5$, SEMPRE. In particolare l'acciaio $\mu = 0,3$, ovvero che la deformazione longitudinale è il 30% di quella primaria (V. aumenta).

Può accadere che in materiali + compressi la struttura cristallina varia, cambia la configurazione di equilibrio, ma non accade per materiali x l'ing. civile. (cost. sperimentale)

È un altro limite caratteristico x mat. x costr. civili:

Il limite INFERIORE $\mu = 0$. Se fosse $\mu < 0$ il materiale si allargherebbe.

Durante prova di trazione si rileva un ulteriore comportamento

grafico dove in ascisse c'è sempre

ϵ_z , ma in ordinate è presente

μ . In campo elastico $\mu_{acc} = 0,3$,

ed è COSTANTE. Avvicinandosi a

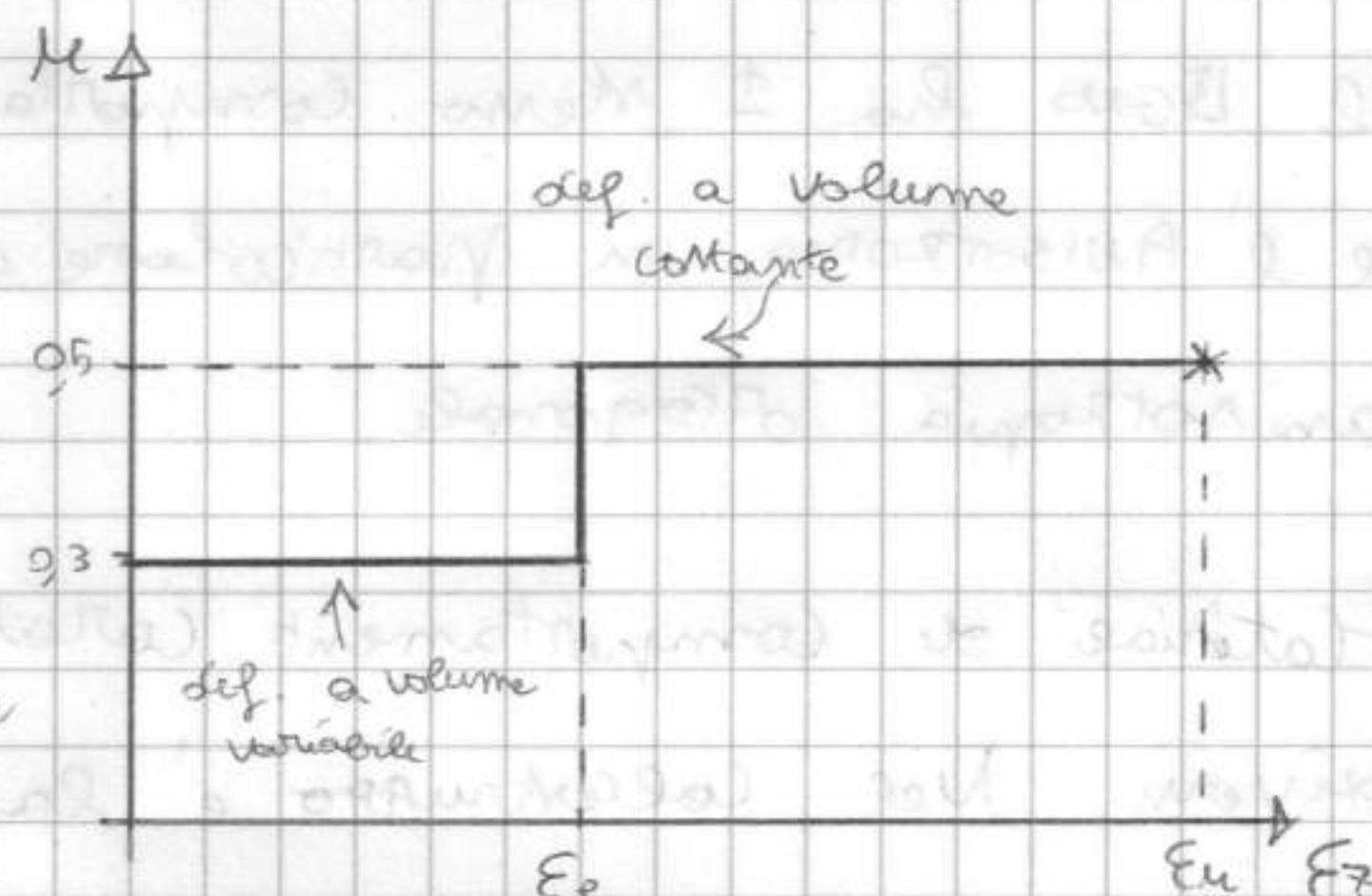
E_e curva ha variazione brusca e

si colloca in un valore superiore

anch'esso costante $= 0,5$. Le F. non le stesse ma per la deformata

imita a scorrere, c'è scorrimento tra strutture cristalline (e non

varia il volume) mentre nel campo elastico c'è spostamento dalla posizione di equilibrio.



Comportamento acciaio è nott. identico in tutte le sue parti (e "quasi", d. da spessore e sup. dirett. a contatto). Quando materiale ha un

comportamento meccanico identico in ogni sua parte si dice

OMogeneo / È ISotropo se comportamento è indipendente dalla direzione (oppure è anisotropo). Alluminio è omogeneo e

isotropo come l'acciaio \Rightarrow grafici identici ma cambiano i valori. (59)

Vale in generale per materiali metallici

Ex: il CALCESTRUZZO, c'è prova di COMPRESSIONE.

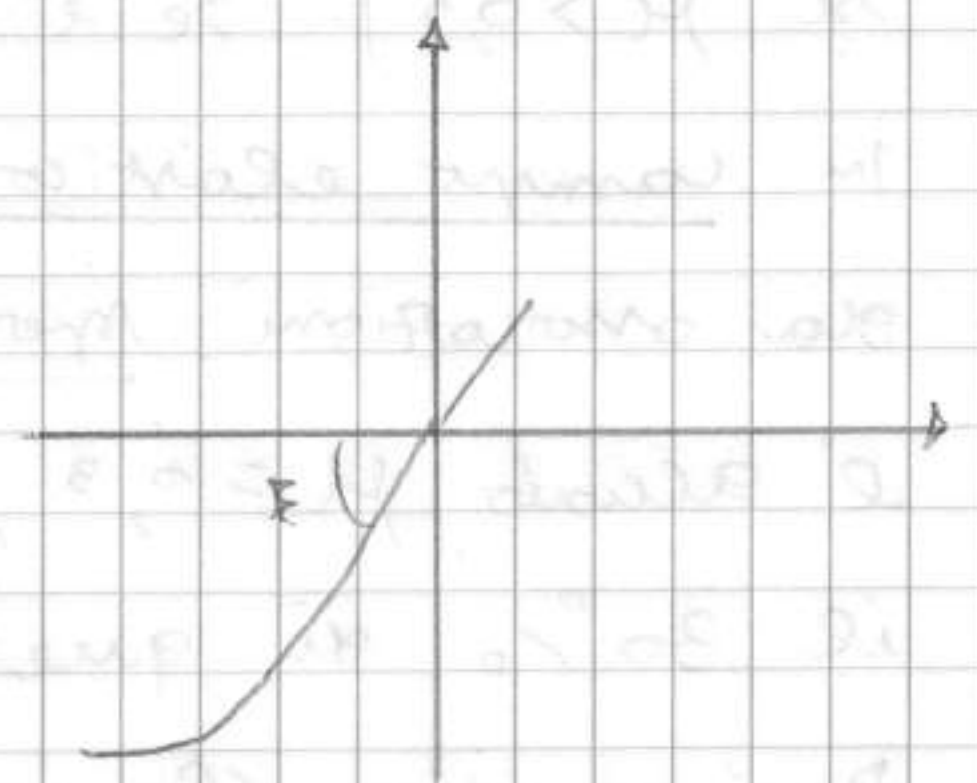
C'è brevissimo comportamento a trazione

e il grafico è lineare-elastico. Non è

dustile quindi con piccole forze c'è la

rottura (a trazione). Non si applica in

genere prova momento al calcestruzzo.



È di tipo di inerti, dall'acqua, dalle sori, dalle clausi
del cemento, dalla ghiaia, etc... Può cambiare quindi anche μ .

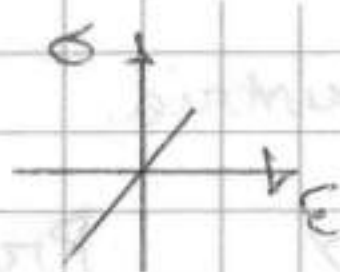
Comportamento è omog. OMOGENEO e ISOTROPO (in scala macroscopica).

Il LEGNO ha \pm stesso comportamento, ma caratteristica importante
è l'ANISOTROPIA, in particolare è detto "ORTOTROPO" perché ha
anisotropia ortogonale.

È serie di comportamenti caratteristiche che si esplicano in tempi
diversi. Nel calcestruzzo è la viscosità (carico sulla struttura
la fa reggere in campo elastico, ma se rimanere
per tanto tempo si ha un'altra deformazione che si sviluppa
per il tempo che il carico rimane sulla struttura) → nell'acciaio
se c'è trazione costante nel tempo si ha un allungamento costante,
fenomeno di RILASSAMENTO.

(IPOTESI sui MATERIALI)

• ELASTICO



• LINEARE

non ha rottura, plasticizzazione, fenomeni

reversibili

• OMOGENEO

• ISOTROPO

Forma non influisce. Teoria applicabile a trave e a forme generiche

Basta che elemento sia almeno isotropico.

Si considerano (IPOTESI in COMPOSING STRUCTURES):

- PICCOLI SPOSTAMENTI (rispetto a dim. elementi strutturali) → tutte le relazioni che la riguardano possono essere scritte (approx.) rispetto a config. iniziale purché non influisca su geometria struttura.

Ex: membrina. Oggetto si deforma. Da A a B estremo



descrive arco di curva. Spostamenti piccoli non /

questi effetti non influenzano eq. di equilibrio. Approx. stile

errore / ma non produce effetti su geometria. Cio' non

sempre è possibile. Ex: aste melle compresse.

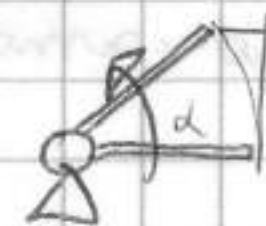


Possono sbandare; Ex: strutture sovraccaricate da funi (ex. teleferica)



→ DA EVITARE. Ipotesi porta ad usare cinematica

linearizzata risp. a quella completa. Ex. Rot.



intorno al cardine. Approx arco di moto alla

sua tangente. Si assumono $\sin \alpha \approx \tan \alpha$ → non corr. sviluppo

lungo circonfer.

Con queste ipotesi (sviluppati all'infinito '800 a causa sviluppo strutt. acciaio) si fece modell. analitica di un solido costituito

da reticolo particelle distribuite in maniera regolare.

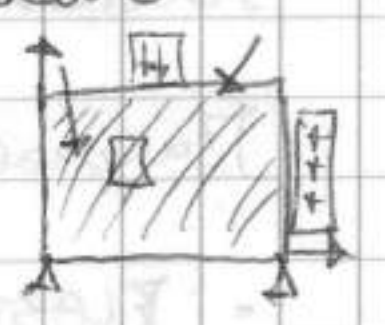
e si considerano eq. di equilibrio particelle e lim (n. part.

→ ∞) e lim (α → 0). È completo che materia è



↓
NAVIER
[1822]

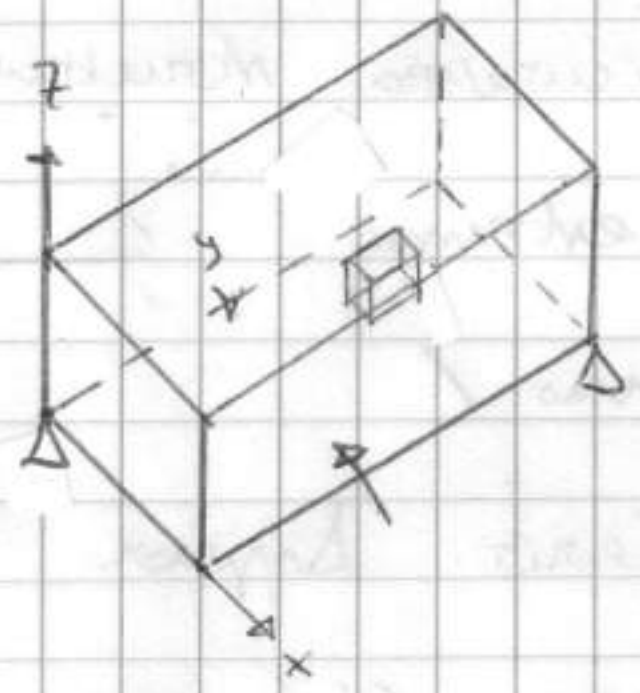
Cont. da punti specifici. Approccio superato dal modello dove la massa del solido e' distribuita uniformemente.



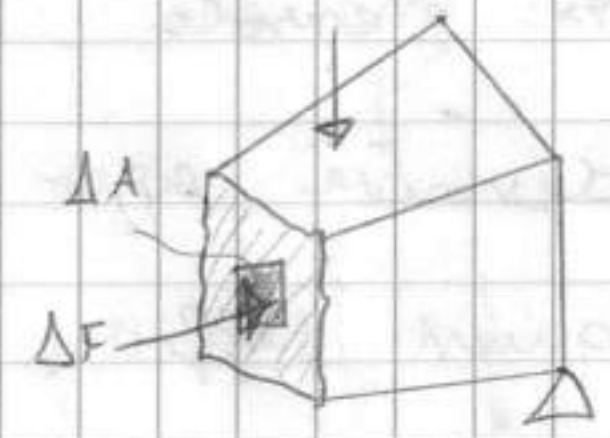
Preso un volume $\rightarrow 0$ che e' una parte della materia \Rightarrow continua.

CONTINUA (oppo a PARTICELLARE) \Rightarrow SOLIDO DI CAUCHY [1823]. Preso qualunque solido e' = agli altri; si puo' eseguire qualsiasi operaz. al limite (e f. continua).

Base continua, solido vincolato. In restrittive sui TIPI di CARICHI che possono esserci. Si ammettono carichi puntuali, lineari, superficiali e azioni di volume [azioni esterne che agiscono sul solido, ex. peso proprio, azioni inerziali]. Si stabiliscono relazioni x l'equilibrio in qualunque parte, eq. x l'elasticita', linearita', omog. e isotrop. Ex: se e' elastico non puo' rompersi.



\rightarrow Si taglia solido con sup. qualsiasi. \Rightarrow risultanti di F che portano eq. Prendo una parte ΔA della sup.



Tagliata. Su questa parte finita ci saranno delle ΔF .

Si definisce la TENSIONE MEDIA $= \frac{\Delta F}{\Delta A}$ e facendo il limite si

ottiene la TENSIONE: $\vec{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta A}$ (V pto del solido, che e' continuo x isotrop)

Scomponiamola:



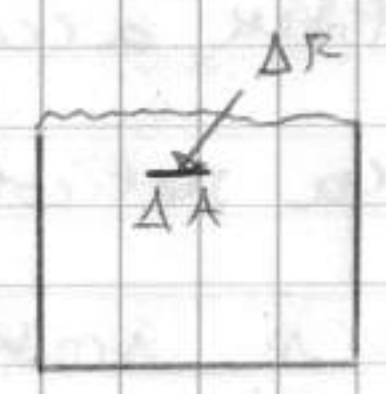
Componente \perp e tg a sup. di taglio.

- le componenti $\perp \equiv \sigma$
- " " $tg \equiv \tau$ } TENSIONI NORMALI E TANGENZIALI

(ovvero V pto del solido) $\rightarrow t(x, y, z); \sigma(x, y, z); \tau(x, y, z)$

Per rendere l'eq. equilibrio si fa ult. ipotesi.

Prendo ΔA , risultante puo' non essere applicata nel baricentro e inclinata. Ipotesi aggiuntiva e' che

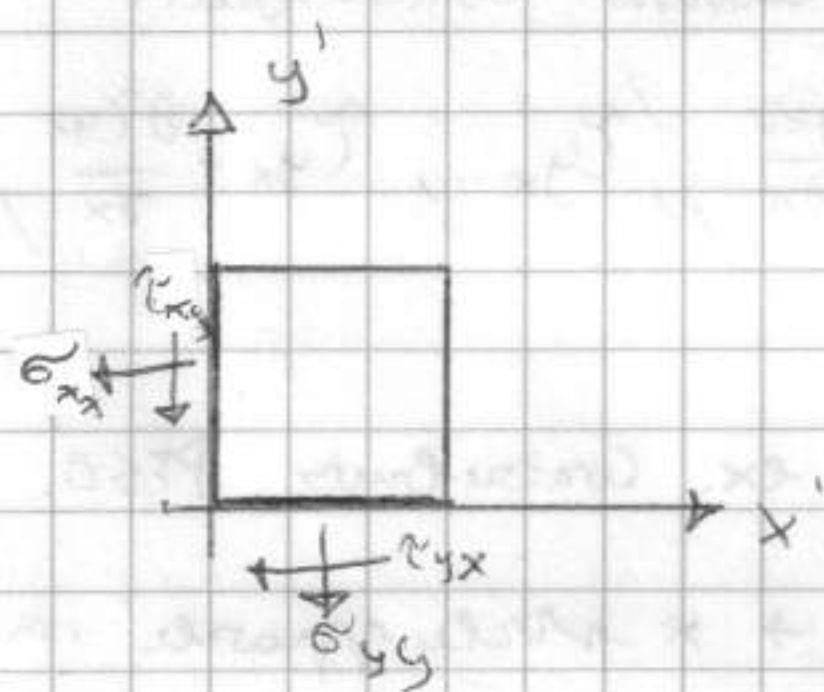
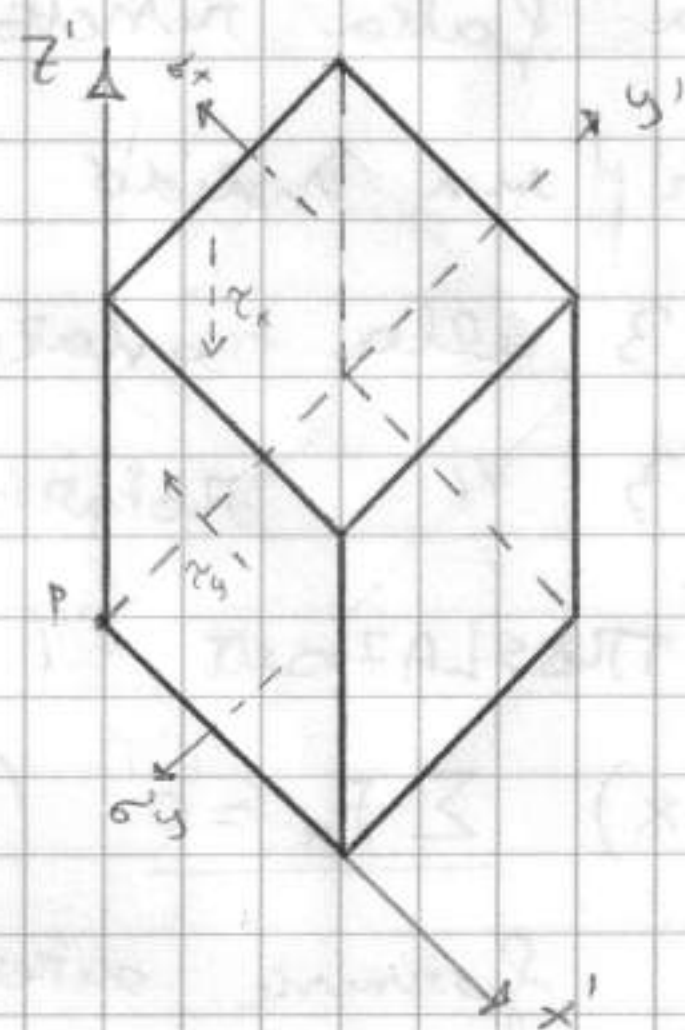


le f. delle t, σ, τ siano continue. Quindi posto (prometto)

avere delle σ variabili. Passando a $\frac{1}{\infty}$ posso trattarlo (il $\sigma \frac{1}{\infty}$)
 come se fosse uniforme \Rightarrow la risultante F nel tratto passa x il
 baricentro. Quindi al lim. $\sum M$ delle $F_i \rightarrow$ IPOTESI DI ASSENZA
 DI COPPIE

Obiettivo e' studiare equilibrio Valido x e' intero solido. Fenomeno
 continuo si vogliono eq. rispetto a $\frac{1}{\infty}$ in p.to generico. Scelta +
 semplice e' prendere parallelepipedo orientato come base con dim.
 dx, dy, dz . Am. locale con origine in vertice

Cubo $\frac{1}{\infty}$ [P]. Si evidenziano 6 superfici ottenute
 con tagli con piani // a piani coordinati. Per aver
 vedere lo stato di tensione ne studiamo la
 t. sulle 6 facce. Si introduce nomenclatura completa.
 [rapp. x proietti piani]

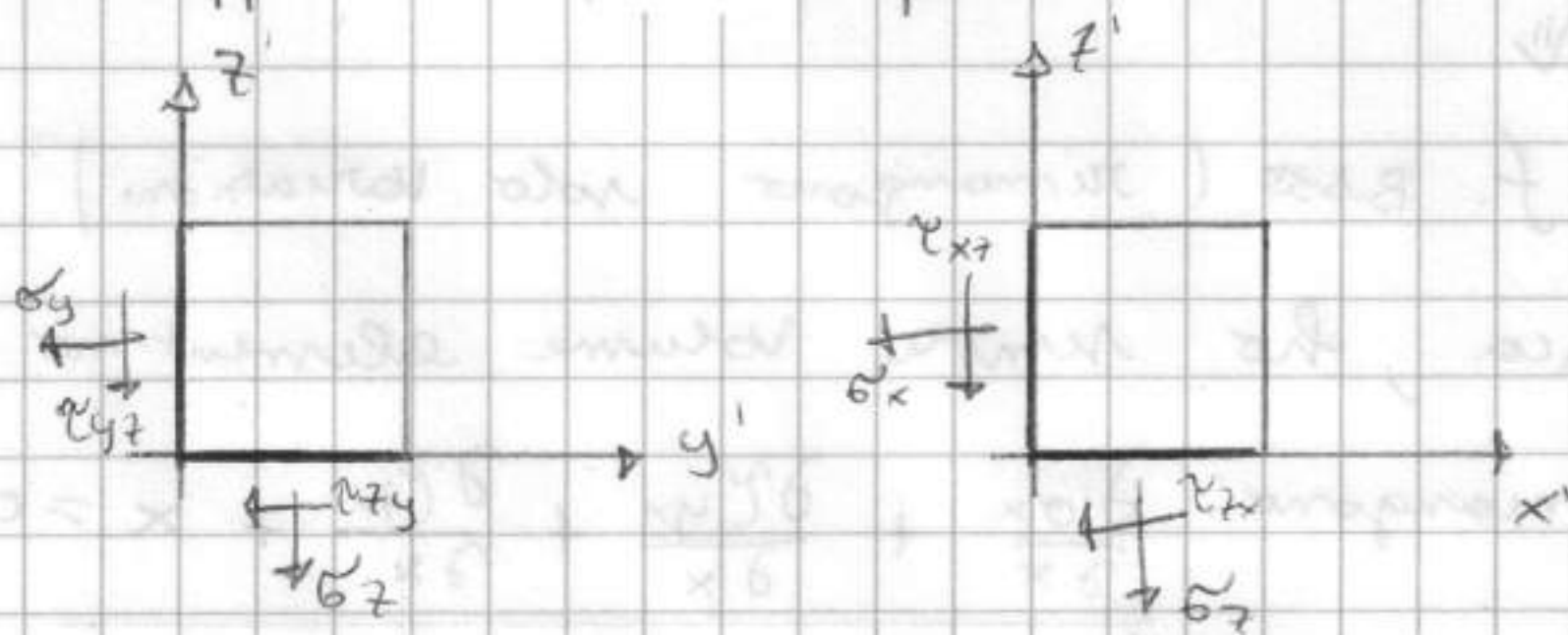


\rightarrow [vista dall'alto]

Evidenzio forze su piani coordinati. Posso
 avere σ, τ . Per distinguere le τ sulle varie
 facce, devo individuare di quale coniscero.

Nomenclatura e' indicia che rappres. la \perp alla
 faccia. [quindi σ_x, τ_x e σ_y, τ_y]. Ma non basta. Devo indicare
 anche in quale dir. ho le componenti di direzione \Rightarrow indicare la DIREZIONE
 Se indicia non coincidono si considerano (ex. $\sigma_{xx} \rightarrow \sigma_x$)

Si applica a tutti i piani.



(\rightarrow altre 2 facce sui
 piani coordinati)

La tensione totale t e' scomposta in 3 σ e 6 τ \rightarrow sempre scambiati
 nei suoi

Cosa accade sulle facce // ?

Diagram illustrating a rectangular element in the x - y plane. The element has width dx and height dy . The forces acting on it are:

- Horizontal forces: $\sigma_x dy$ on the left face and $(\sigma_x + d\sigma_x) dy$ on the right face.
- Vertical forces: $\tau_{xy} dx$ on the bottom face and $(\tau_{xy} + d\tau_{xy}) dx$ on the top face.

The coordinate axes x and y are shown.

ho valore base + variazione. Derivate parziali

Per un solido nello spazio ho \downarrow 6 eq. di equilibrio indip.

- TRANSLAZIONE

formine direzione. Sappiamo che le comp. che stanno contribuendo

Posso avere anche eventuali forze sul Volume, ex. Contributo PESO.

Distanze del pigno sono le altre 2 rimp. a quelle del
 $\downarrow \times$ Collocare ore.
 1' in ore.

$$(-\cancel{5x} + \cancel{5x} + \partial 5x) dy dz ; (-\cancel{7x} + \cancel{7x} + \partial 7x) dx dz ; (-\cancel{7x} + \cancel{7x} + \partial 7x) dx dy$$

Fuori c'è termine de manca, ho sempre volume elementino

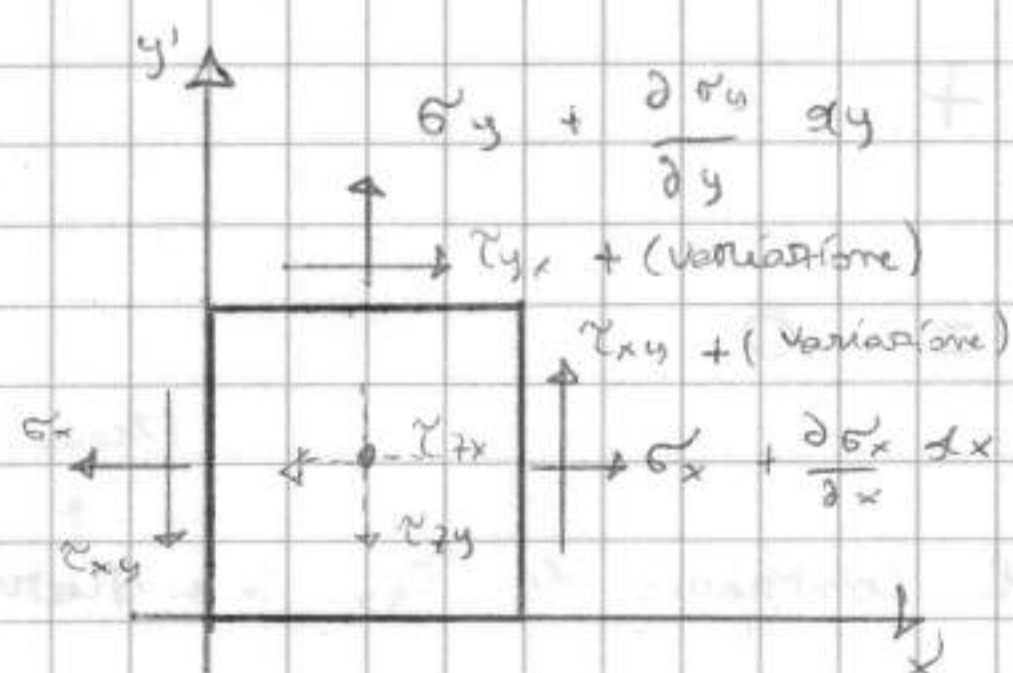
(identici in ogni dove) \rightarrow si elimina. Rimangono: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + x = 0$

Le variation de tension selon \uparrow l'équilibre le action de volume.



→ se cambio il livello ho variazioni nel peso. & increment

tata deve equilibrare per elemento $\frac{1}{\infty}$ in t .



$$\left(-\sigma_x + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz +$$

$$\left(-\tau_{yx} + \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz +$$

$$\left(-\tau_{zx} + \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + X dx dy dz = 0$$

Le termine incrementale moltiplica il volume che quindi si annulla, si ha

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

y) [con passaggi analoghi con termine d'incremento con 2° indice y]

Derivate risp. risp. a 1° indice

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$

z) Analogamente:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

cioè we V p.to.



Valise x un punto generico del volume → EQUAZIONI INDEFINITE DI

EQUILIBRIO X IL SOLIDO 9 inc. (3 σ e 6 τ) + Altre eq. (ma non

riuscito a chiudere il sistema che rimane ipostatico → non BASTA il solo eq. dovremo conoscere anche la deformabilità).

- ROTAZIONE

z) Considero rot. intorno al baricentro Ip: $\sum \sigma$ passa x baricentro (annulla coppie all'inf) \Rightarrow tutte le σ non danno contributi. Inoltre non danno contr. le $\tau \parallel$ a z, ovvero quelle con 2° indice z.

Rimangono x, y. [$\tau_x, \tau_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$] Ma anche τ_{zx} e τ_{zy} non danno contributi (passano per l'asse). E' anche nullo il termine delle f. di volume (risultante passa x baricentro). Quindi si ha:

$$\tau_{xy}; \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \quad \tau_{yx}; \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

Passiamo alle forze. Le τ_{xy} sono su $dy dz$, mentre le τ_{yx} sono

su $dx dz$. Poi i bracci:

$$\left(\tau_{xy} + \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz + \frac{\sigma_x}{2} +$$

$$\left(-\tau_{yx} - \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \frac{\sigma_y}{2} = 0$$

(meno -)

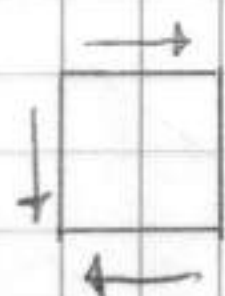
Le τ_{xy} danno coppia antisimmetrica (entrambi +), al contrario le τ_{yx} in antisimmetrica.

Qui non ci esistono i termini base, c'è termine di ordine inferiore

+ importante. Equilibrio tra f. base, prima in variazioni. S,

trascurano termini di ordine superiore. S, semplifica il volume $dx dy dz$.

Schema di equilibrio



+

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

(quindi)

$$y) \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$x) \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

RELAZIONI DI RECIPROCA
DELLE RELAZIONI TANGENZIALI

Veri delle f.
(INDEFINITE)

⇓

Ho globalmente 6 eq. x 3 incognite.

H

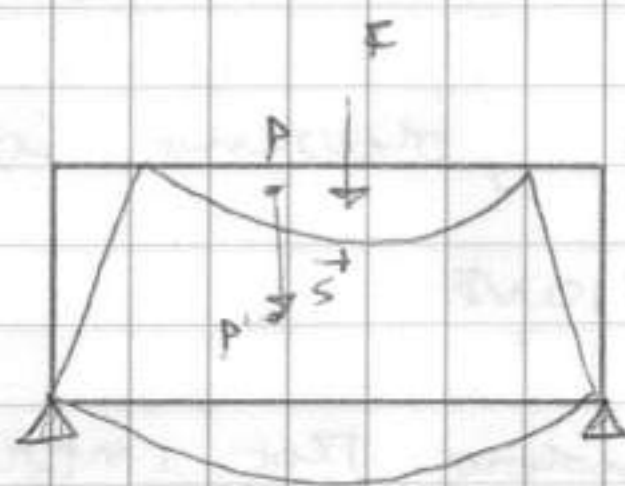
(1) NEMATICA DEI CORPI DEFORMABILI

↓

derivazione del moto (dinamica pure lo fa)

ma non si considerano
il tempo e le f. inerziali

$$\vec{PP'} = \vec{s}$$

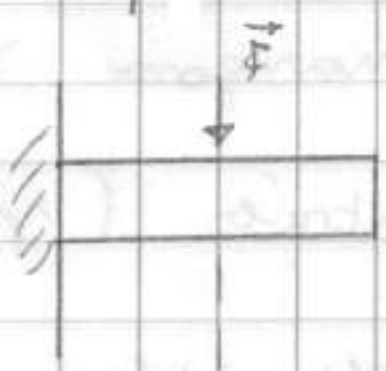


Studiamo l'evoluzione di P a P' considerando

solo \vec{s} il tempo ed il tipo di traiettoria non si considerano.

Confermiamo sin e tg corr. piccoli spostamenti. Corr. comp. spostamenti.

$u(x, y, z)$
 $v(x, y, z)$
 $w(x, y, z)$ } Corr. membrana con \vec{F} . (c'è parte
ricarica a sx, c'è parte che
si inflette e parte che rimane dritta.



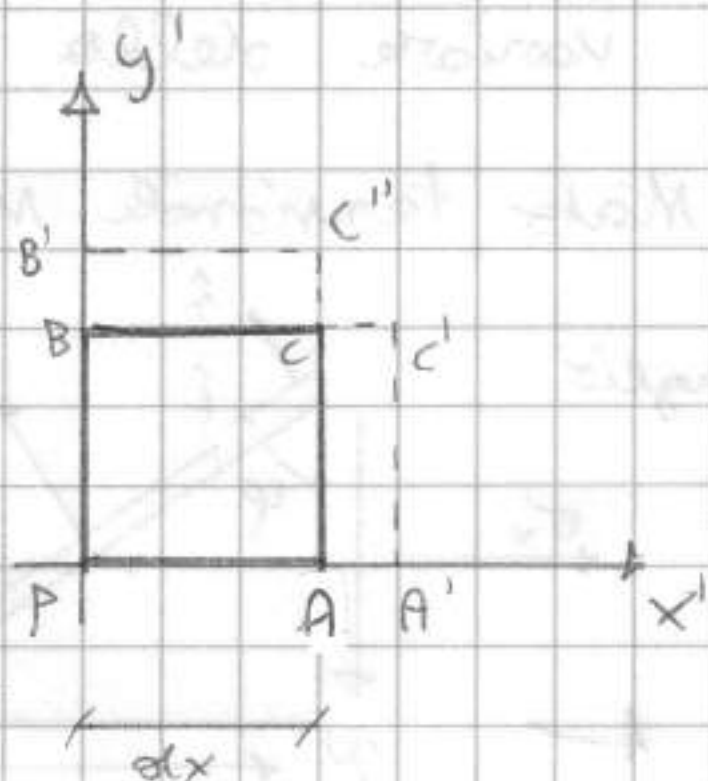
L' \vec{s} di campo di spostamenti \vec{s} e l' \vec{s} sollecitazione.



↳ descriviamo 2 gruppi di fenomeni: parte di

⑥ alto di moto rigido e parte di impegno statico materiale.

3. aggiunge descrizione della DEFORMAZIONE elemento $\frac{1}{\infty}$.



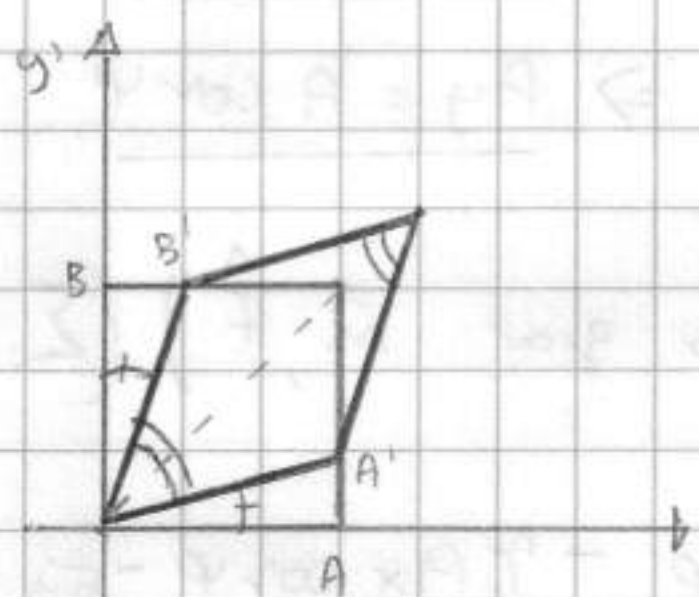
Elemento può allung. o accorc.

Si dice DEFORMAZIONE (LONGITUDINALE) il rapporto tra la variazione di dimensione e la dimensione originale:

$$\epsilon_x = \frac{AA'}{PA}, \quad \epsilon_y = \frac{BB'}{PB}, \quad \epsilon_z = \frac{DD'}{PD}$$

(analogo a prova di trazione). Deformazione puramente geometrica.

Si deve derivare anche la variazione degli ANGOLI.



→ Corrisponde a prova, materiale e impegnato. \Rightarrow Verifica di resistenza. [Ci possono essere var. degli angoli, ma nel passaggio al lim. le curve si appross. a tang.]

Queste variazioni si definiscono come variazioni dell'angolo inizialmente retto. Si def. la DEFORMAZIONE ANGOLARE la diff. tra \square e angolo variato: $\gamma_{xy} = \hat{BPB'} + \hat{APA'}$

[sono entrambi numeri puri]. Dobbiamo correl. i piani con indice che $\hat{=}$ a numero. [deformazione $\hat{=}$ indicata in ϵ , γ l'angolo non serve, dobbiamo sapere i piani che hanno subito la variazione]. Sarà un doppio indice di piano. Coincidono con le x . Possibili coppie sono γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz} [gli indici inv. $\hat{=}$ a indici originali]. Abbiamo 3 spost. + 6 deformazioni, 9 nuove f . incognite (x un tot. di 18 inc. con 6 equazioni).

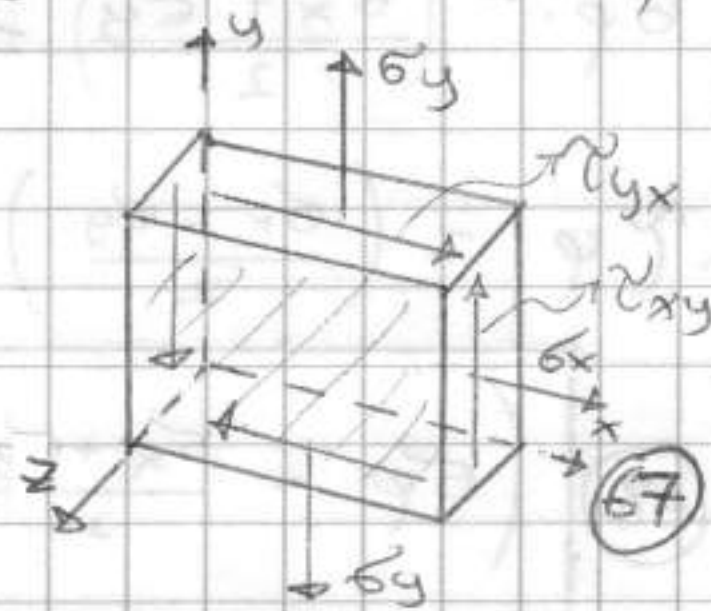
3/3/06

STATO PIANO DI TENSIONE

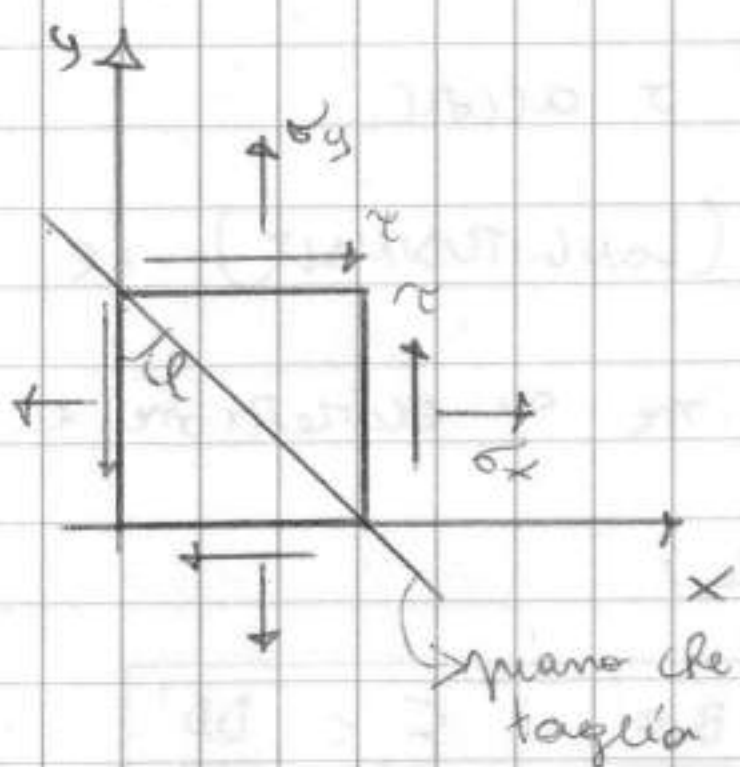
Si considera un elemento 3D nel continuo di Cauchy (infinitesimo)

Rappresenta un punto, quindi in contr. unica componente di tensione. Per lo stato piano, si conv. che le tensioni su due piani piano = 0.

[eq. equilibrio = eq. reciprocità]. Si guarda



elemento nel piano x, y . Usati in sistemi piani di travi e in lastre.

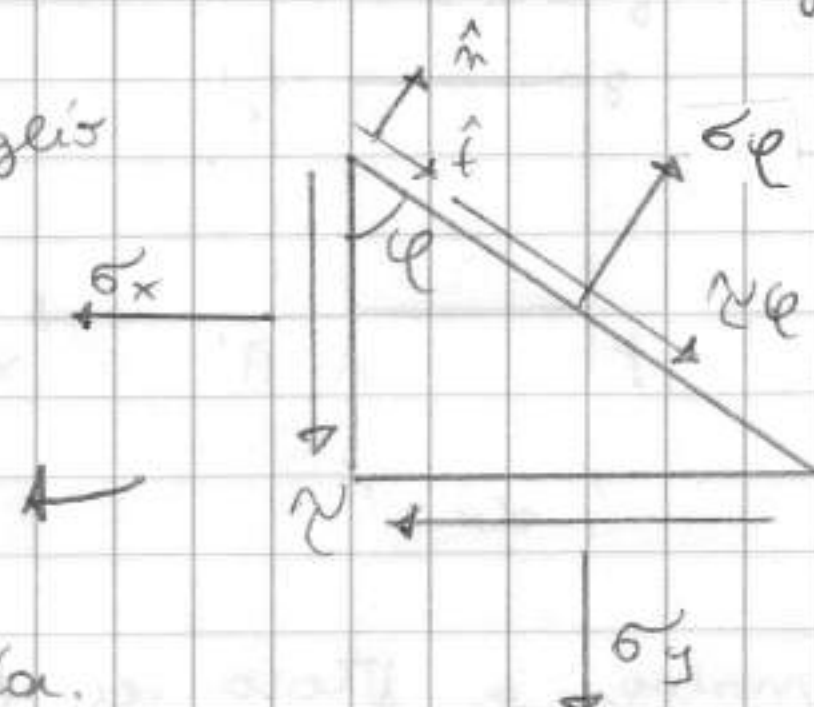


Si studiano tensioni al variare della giuntura

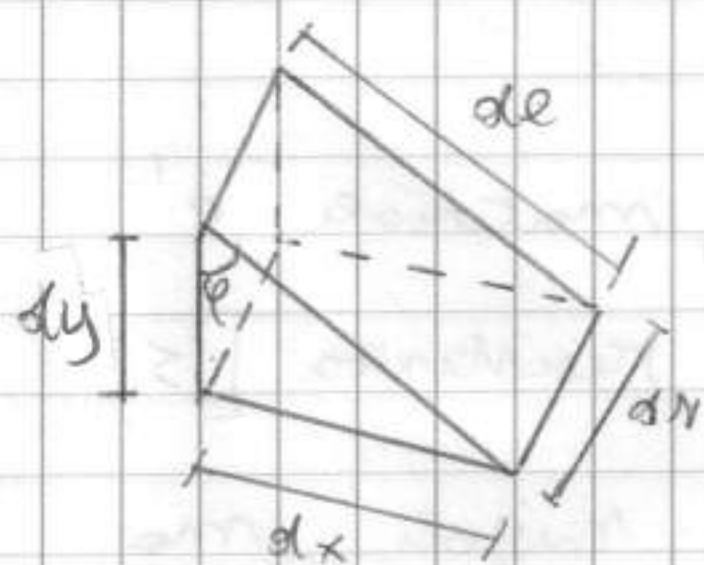
Si evidenzia il generico stato tensionale in giuntura generica. \rightarrow piano taglio

$$[\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}]$$

Stato equilibrio \times



quest'area contr. le F. agenti su ogni faccia.



$$A = dx dy; \quad A_x = dx ds \Rightarrow A_x = A \sin \varphi$$

$$A_y = dy ds \Rightarrow A_y = A \cos \varphi$$

Stato eq. equilibrio (fatto gir. \hat{n}, \hat{t}) $(\sum \vec{F}_n = 0)$

$$\sum F_n = 0: \quad \sigma_\varphi \cdot A - \tau A_y \sin \varphi - \sigma_x A_y \cos \varphi - \tau A_x \cos \varphi - \sigma_y A_x \sin \varphi = 0$$

$$\sum F_t = 0: \quad \tau_\varphi \cdot A + \tau A_y \cos \varphi - \sigma_x A_y \sin \varphi - \tau A_x \sin \varphi + \sigma_y A_x \cos \varphi = 0$$

Sostituendo i valori prima calcolati al posto di A_x e A_y mette in evidenza A, quindi si annulla e non compare più. Ottengo:

$$\begin{cases} \sigma_\varphi - \tau \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_x \cos^2 \varphi - \tau \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_y \sin^2 \varphi = 0 \\ \tau_\varphi + \tau \cos^2 \varphi - \sigma_x \sin \varphi \cos \varphi - \tau \sin^2 \varphi + \sigma_y \sin \varphi \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\varphi - \tau \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_x \cos^2 \varphi - \tau \sin \varphi \cos \varphi - \sigma_y \sin^2 \varphi = 0 \\ \tau_\varphi + \tau \cos^2 \varphi - \sigma_x \sin \varphi \cos \varphi - \tau \sin^2 \varphi + \sigma_y \sin \varphi \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

Metto in evidenza σ_φ e τ_φ :

$$\begin{cases} \sigma_\varphi = \tau \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_x \cos^2 \varphi + \tau \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi \\ \tau_\varphi = -\tau \cos^2 \varphi + \sigma_x \sin \varphi \cos \varphi + \tau \sin^2 \varphi - \sigma_y \sin \varphi \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\varphi = \tau \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_x \cos^2 \varphi + \tau \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi \\ \tau_\varphi = -\tau \cos^2 \varphi + \sigma_x \sin \varphi \cos \varphi + \tau \sin^2 \varphi - \sigma_y \sin \varphi \cos \varphi \end{cases}$$

Sostituiamo: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ e $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$,

$$\begin{cases} \sigma_\varphi = \tau \sin 2\varphi + \sigma_x \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) + \sigma_y \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \\ \tau_\varphi = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\varphi - \tau \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) + \tau \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\varphi = \tau \sin 2\varphi + \sigma_x \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) + \sigma_y \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \\ \tau_\varphi = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\varphi - \tau \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) + \tau \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right) \end{cases}$$

Risolviamo

$$\begin{cases} \sigma_\varphi - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\varphi + \tau \sin 2\varphi \\ \tau_\varphi = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\varphi - \tau \cos 2\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_\varphi - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\varphi + \tau \sin 2\varphi \\ \tau_\varphi = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\varphi - \tau \cos 2\varphi \end{cases}$$

Elevo al quadrato

i due termini \forall eq.

e li sommo.

$$\textcircled{68} \quad \left(\sigma_\varphi - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_\varphi^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau^2$$

\rightarrow eq. di una circonferenza

σ_φ e τ_φ ~~di~~ da φ , ma dallo stato tensionale noto $[\sigma_x, \tau_x]$

In senso "explicit". È una CIRCONFERENZA NEL PIANO $(\sigma_\varphi, \tau_\varphi)$ di

raggio $= \sqrt{(\text{1 termine})}$: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$ e di centro $C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$

È nell'asse delle σ (o "asse" o "axis")

→ Si chiama CIRCONFERENZA DI

MOHR. (Negli Stati materiali 3D

sono 3, in quelli piani 1)

(Piano σ, τ = Piano di MOHR)

Indica il valore delle coppie

$(\sigma_\varphi, \tau_\varphi)$ al variare di φ → (h = "polo delle giaciture", parte 1

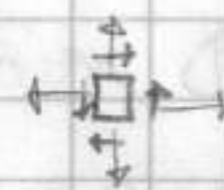
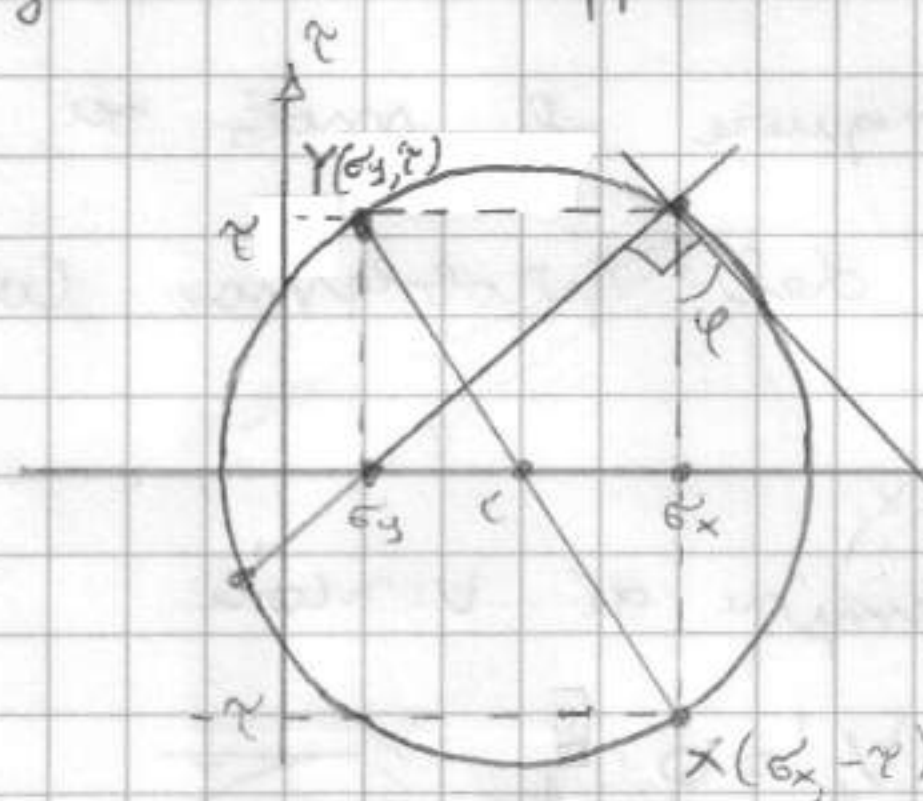
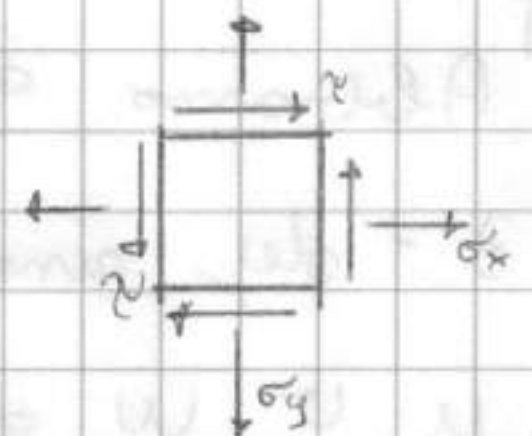
traccia di 1 giacitura del polo h e si individua p.t. dove $\sigma = \sigma_\varphi$ e

$\tau = \tau_\varphi$. Corrispondenza diretta tra la dir. delle 2 giaciture e

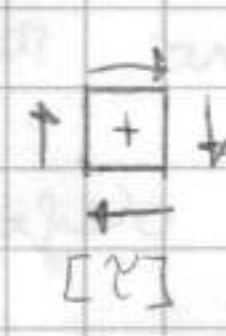
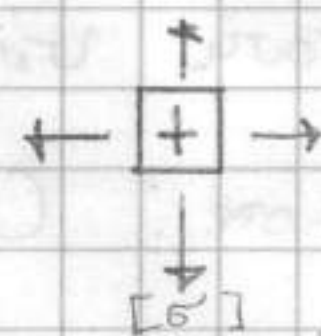
l'inclinazione \times collocare σ_φ e τ_φ

Supp. di conoscere stato tensionale intorno ad elemento

generico. Supponiamo che $|\sigma_x| > |\sigma_y|$. Per conven



Zione:



(non sono Stati equilibrati, ma solo conv.)

Mi serve solo \times trovare valori nel piano.

Sulla faccia destra. ho τ in verso orario

quindi in corr. di σ_y ho $\tau > 0$. "Y" individua lo stato tensionale

in faccia destra, e p.t. \in circ. di Mohr. Sulla f. verticale la

$\tau_e < 0 \Rightarrow$ "X" individua st. terr. in giacitura vert. (\in a circ. di Mohr)

[Traccia di un piano che taglia il solido di Cauchy]. Il centro

è a metà tra σ_x e σ_y . Congiungente X, C, Y è il diametro. Direzioni

\perp hanno par. opposte nel cerchio di Mohr. Se porto la verticale

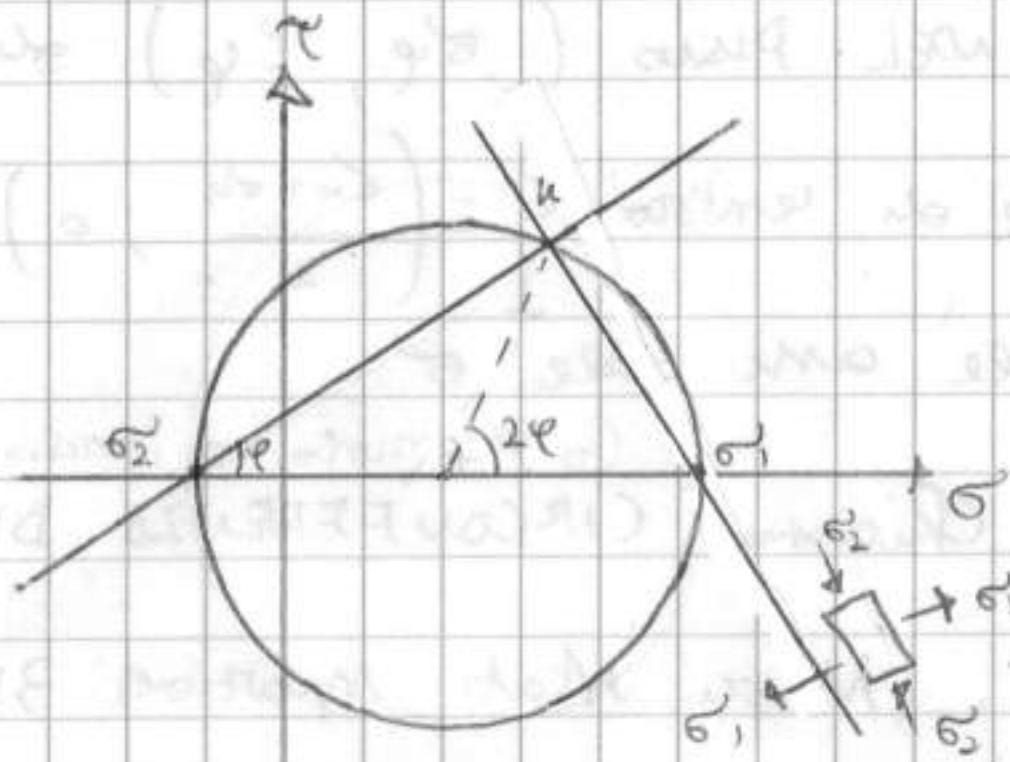
da "X" e la orizzontale da "Y" si incontrano nello stesso p.t.

sulla circonferenza, "h" → p.t. rimp. al quale se faccio partire

una dir. qualsiasi inclinata di φ risp. a orizzontale incontro su

Circoli di Mohr alcuni stati tensionali.

dette DR. PRINCIPALI



Esistono due particolari giaciture dove intorno all'elemento le τ sono NULLE, (a partire da k le giacit. involvono p.t. in cui σ) σ sono le t. grandi e di trazione, i max valori, non posso uscire dalla circonferenza. la min. e' σ_2 di compressione. Esistono solo t. normale

dette PRINCIPALI.

E' importante conoscere lo stato di tensione max, associato alle tensioni principali. Per calcolare le dir. principali:

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

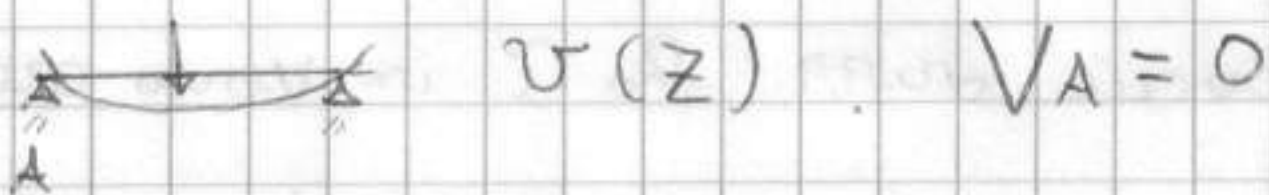
(da: solido di Cauchy)

6/3/06

Abbiamo 9 fun.: 3 spostamenti (u, v, w), 3 - all. longitudinale (ϵ), 3 - def. angolare (γ_{xy})

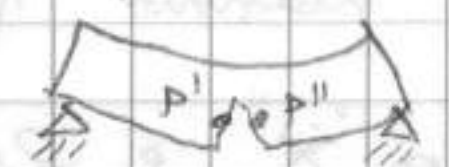
u, v, w devono rispettare vincoli. Distinguere il moto su corpo rigido e deformazione: CONGRUENZA del problema. Con le cond. geometriche.

• ESTERNA: rispetto cond. a contorno in termini di vincoli

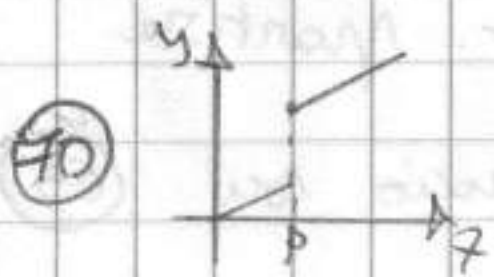


Campo spostamenti deve essere nullo

• INTERNA: Colleg. tra u, w ed ϵ . Assunzione di comp. elastico, quindi non si considera il DANNO. Non c'è una frattura del materiale. Un conto e' il comportamento reale, un altro e' il MODELLO. Se ci fosse frattura, P non trova solo P' ma anche P''.



Quindi ne hanno delle funzioni DISCONTINUE



Nel modello invece la fun. della deformazione e'

unica e CONTINUA (e' conseguenza delle ipotesi).



Danno ammissibile dove M e' max, all' attacco.

Fibre della trave si plasticizzano, si muovono.

(sopra si allungano e sotto si accorciano). Sopra trazione, sotto compressione. Allora rotazioni non sono + nulle.

[mecc. di formazione di una CERNIERA PLASTICA] \rightarrow c' e' un

po' di momento ma non riesce ad opporsi a rotazione.



In zona slanciata c' e' rot. relativa e in

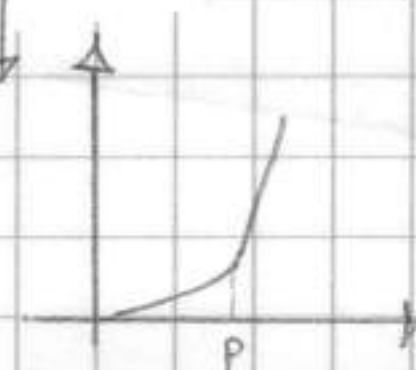
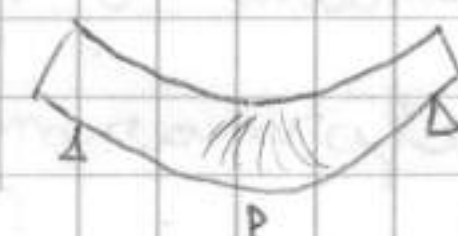
z. deformata c' e' specie di cuspide

si concentra rotazione di parte in rottura.

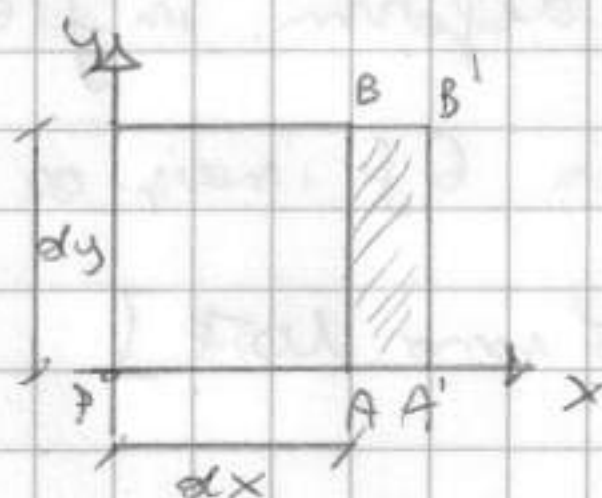
C' e' cuspide nella deformata. Approssimazione

al punto, in realta' e' zona deformata.

le funzioni devono ⁽ⁱⁱ⁾ anche avere DERIVATA CONTINUA



Cons. la ϵ_x , elemento che subisce deform. lungo x .



$$\epsilon_x = \frac{AA'}{BA}$$

Aura' subita anche trasporto rigido.

Tra la config. iniziale e finale si ha:

$u(X_p, Y_p, Z_p)$. In A (essendo f. cont.) rapp.

la variazione con derivata. $u = u(p) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$

(analogo x le tensioni), $AA' =$ differenza tra i due valori. Quindi

$\frac{AA'}{PA} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dx} \Rightarrow \epsilon$ ha valore coerente alla sua natura (num. puro)

Spost. puo' essere anche grande ma deformazione e' legata solo a derivata, ad una variazione.

Si possono scrivere 3 equazioni:

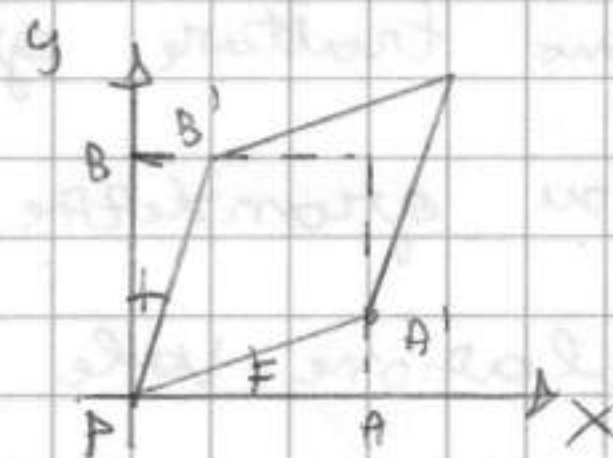
$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

\rightarrow Collegano ϵ al campo di spostamenti.

Deformazione ANGOLARI

Var. angolare senza var. di lunghezza

Nel trasporto possiamo avere qualsiasi



Variatione assoluta.

$$\gamma_{xy} = \hat{A} \hat{P} \hat{A}' + \hat{B} \hat{P} \hat{B}' \quad \text{Definiamo angoli approx. trasversali con la tg.}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{AA'}{PA} + \frac{PB'}{PB} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dy} \quad (\text{anche qui m. puri})$$

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}}$$

Siamo a 18 inc. e 12 eq. Queste 6 sono le EQUAZIONI INDEFINITE DI CONGRUENZA. (valide \forall pto del solido)

Ci mancano 6 relazioni; le troviamo nelle relazioni tra tensione e deformazione.



$\sigma_z = \epsilon_z E$. Dobbiamo generalizzare la relazione costitutiva ottenuta da esperimenti.

Quantificazione del rapporto tens. e def.

Le f. di tensione da rapp. sono 6.

O $\epsilon = f(\sigma)$ o $\sigma = f(\epsilon)$. Entrambe possibili. Per esperienza copiamo di + le f. de le def. Definiamo le comp. delle deformi. in $f(\sigma)$

($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \dots$) (collegamento deve essere LINEARE 6 eq in 6 f. indep. di σ).

$$\epsilon_x = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \sigma_z + a_{14} \gamma_{xy} + \dots \quad [\sigma \text{ sono note}]$$

Dobbiamo def. la MATRICE dei COEFFICIENTI. (36)

	σ_x	σ_y	σ_z	γ_{xy}	γ_{xz}	γ_{yz}
ϵ_x	$1/E$	$- \nu/E$	$- \nu/E$			
ϵ_y	$- \nu/E$	$1/E$	$- \nu/E$			
ϵ_z	$- \nu/E$	$- \nu/E$	$1/E$			
γ_{xy}						
γ_{xz}						
γ_{yz}						

Posiamo trattare gruppi di coeff. con sottomatrici 3×3 , analoghi

tipi di grandezze. Matrice è UNICA, il solido è omogeneo, quindi

⑦ Relazione vale dappertutto. Contenuto matrice è di rigine

sperimentale. Per materiali metallici coeff. sono gli stessi sempre.

Cons. elemento $\frac{1}{2}$ soggetto a σ_x .

ϵ sogg. ad allungamento e a effetto Poisson.

(tutto ha origine sperimentale). ϵ secondarie =

coeff. percentuale ϵ_x primaria. $[\epsilon_y = \epsilon_z = -\nu \epsilon_x]$;

$$\text{se } \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Caratteristico colonna a code lo stesso scambiando gli indici

Termini diagonali uguali (a causa ISOTROPIA) e mat. e

simmetrica.

7/3/06

	σ_x	σ_y	σ_z	γ_{xy}	γ_{xz}	γ_{yz}
ϵ_x	$\frac{1}{E}$	$-\frac{\nu}{E}$	$-\frac{\nu}{E}$			
ϵ_y	$-\frac{\nu}{E}$	$\frac{1}{E}$	$-\frac{\nu}{E}$			
ϵ_z	$-\frac{\nu}{E}$	$-\frac{\nu}{E}$	$\frac{1}{E}$			
γ_{xy}				$\frac{1}{G}$	0	0
γ_{xz}				0	$\frac{1}{G}$	0
γ_{yz}				0	0	$\frac{1}{G}$

Accoppiamento tra ϵ e γ .

Per solido omogeneo e isotropo

γ e ϵ non sono collegati, quindi

i coeff. sono tutti nulli;

Prop. di sim.

metria dei

2 schemi.

Oggetto deformato
[ASSIALE]
SUAA.

mat. conserva simmetria sim. a piano

Stato di tensione No, lo è sim. alle "diagonali"

Espressioni con simmetrie diverse non possono

essere relazionate. Lo stesso per γ_{xy} .

Se sollecito oggetto sim. in maniera sim. ho

deform. sim. (mat. omogeneo e isotropo).

Se invece ho \leftrightarrow materiali e magari anche

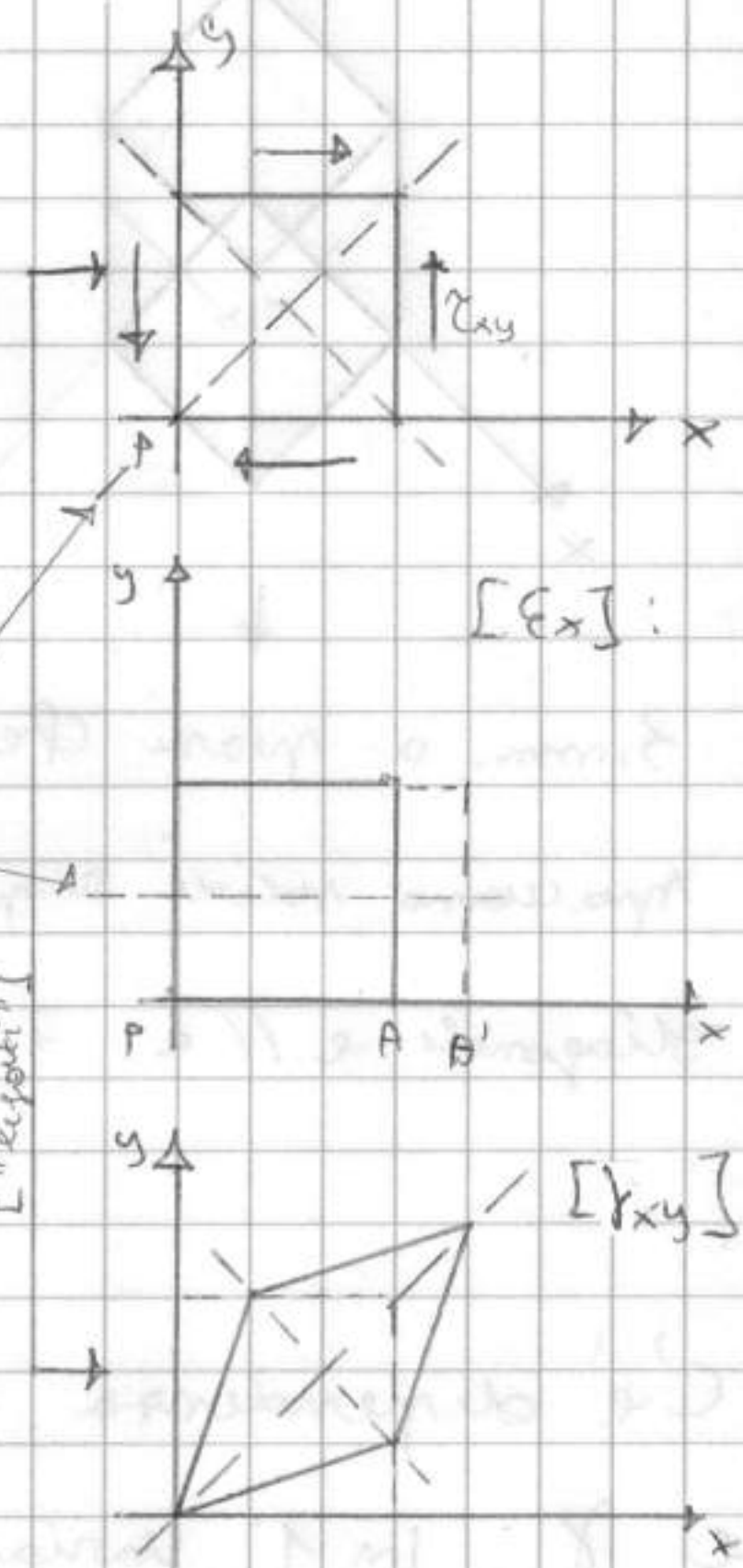
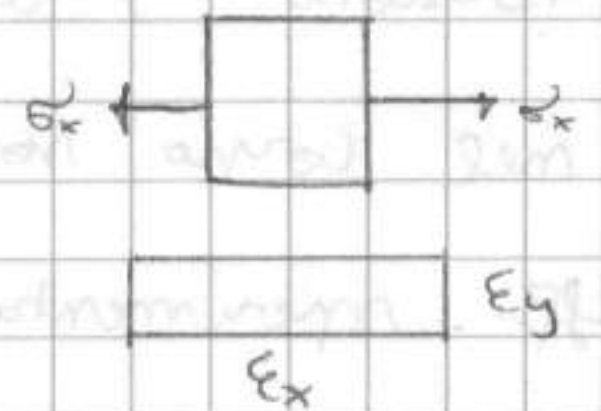
anisotropo si può avere:



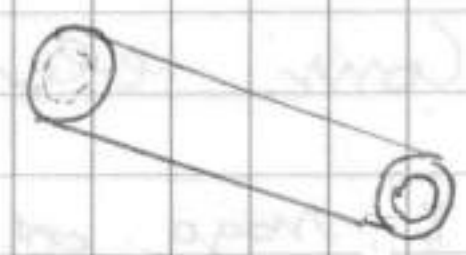
Collegamenti introdotti sono NULLI.

Invece è possibile collegamento tra γ e γ .

In γ_{xy} , γ_{xy} c'è collegamento, determinata sperimentalmente.



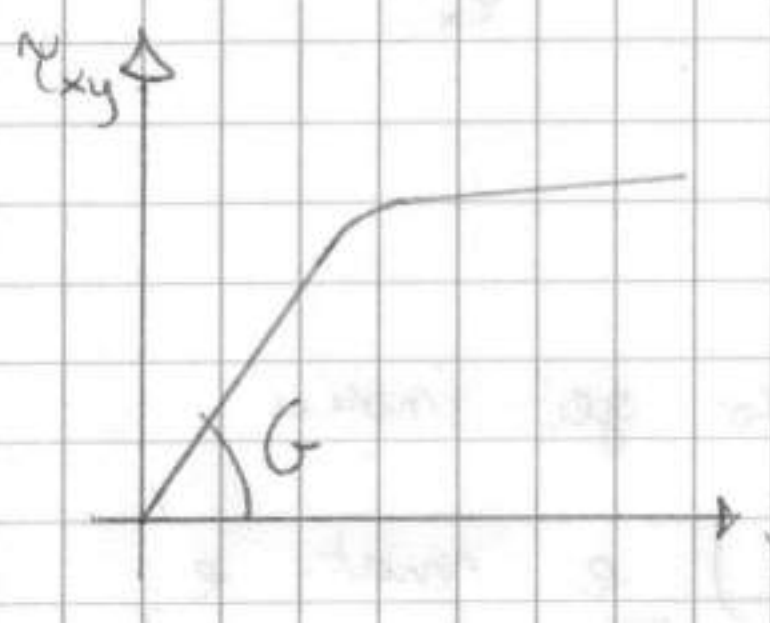
Struttura acciaio tubolare polo spessa e soggetta a torsione. Filare // si deformano diagonalmente



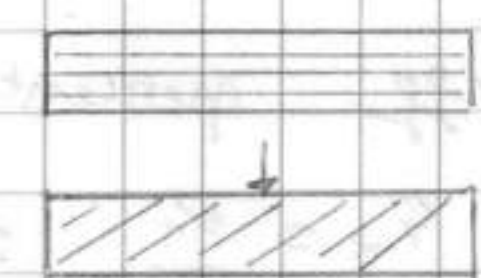
nel corpo solo γ e γ si determina un

Coef. sperimentale: forma simile a acciaio a

[PROSP. LATERALE]



prova di trazione. Angolo, però, ha valore diverso da



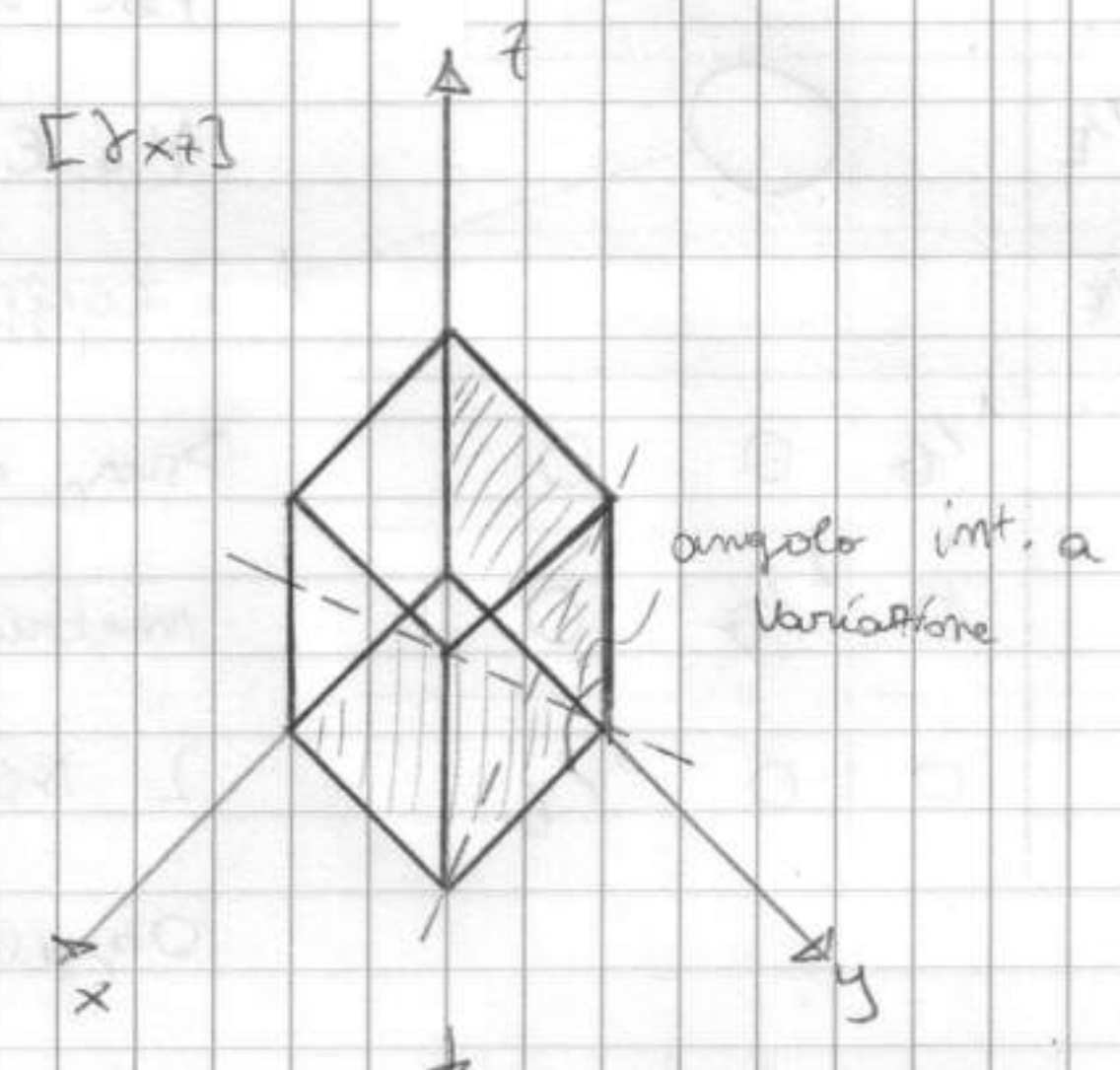
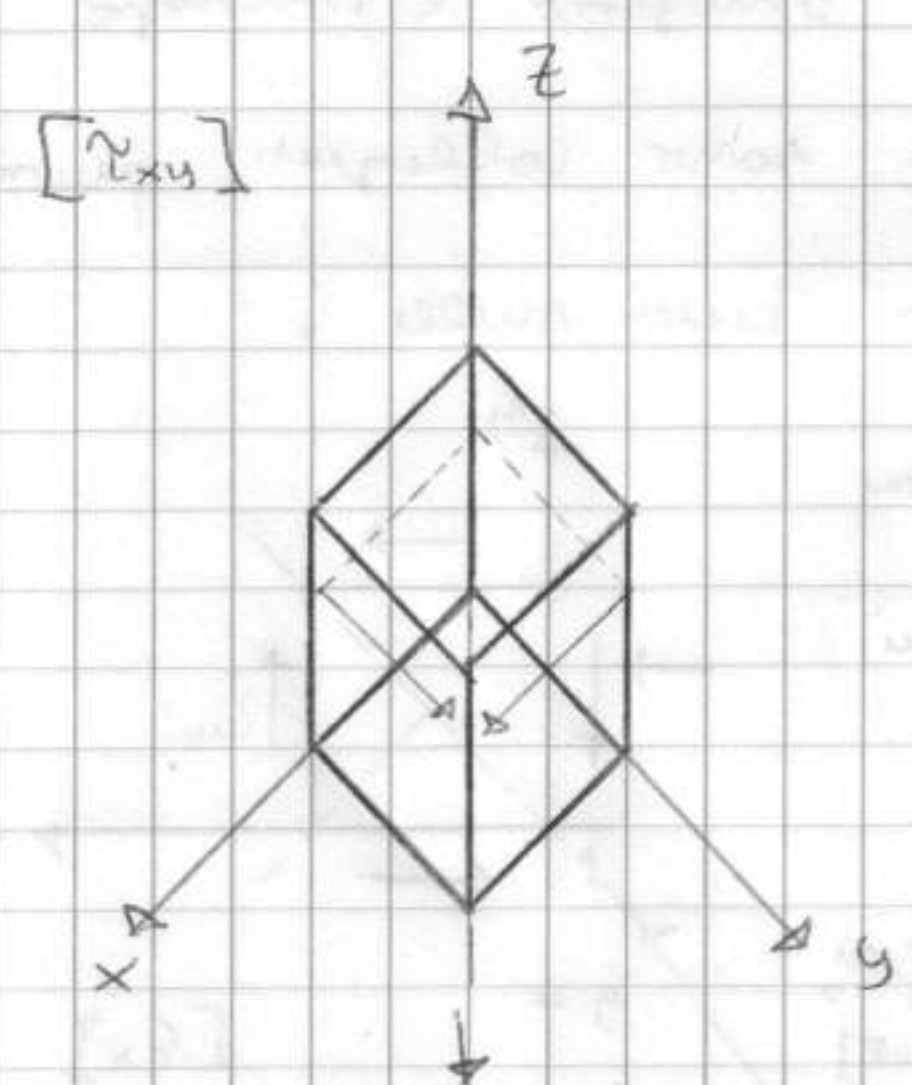
E E' indicato con G , MODULO DI ELASTICITA'

TRASVERSALE Sperimentalmente si ha che

$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$ [trave e + def che nel fenomeno di TILLOTT.]

Lo stesso x la diagonale rimanente.

Conn. γ_{xy} e γ_{xz} .



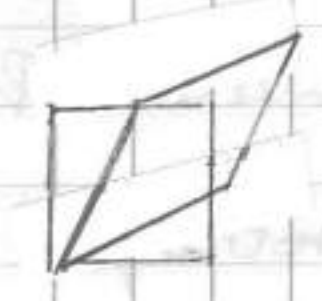
[Meno x le altre combinazioni]

Simm. a piani che spaccano solidi risp. a diagonali e // a z

Non sono simmetriche a stessi piani di γ_{xy}

Avendo simmetrie diverse non possono essere relazionati

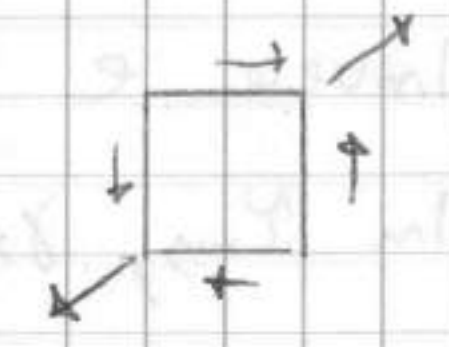
C'è dipendenza dalla base cartesiana scelta. Conn. def. E e γ . In 1° variano gli assi, nel 2° variano angoli, ma anche diagonale ha E



E e γ sono "fatti" di stessa deformazione, ma con rif. diversi

Se conn. γ , le risultanti sono allung. su diagonale

74 I circ. di Mohr delle deformazioni e delle tensioni.



Legame costitutivo ha coeff. interagenti tra loro. Sviluppando circ. Mohr. x def. e collegamenti tra def. rappresentati in base tra loro, si ha che ϵ e γ sono legati. Si ha questa relazione:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(riassunto)

- EQUILIBRIO:

[EQ]

da contr. meccaniche dai principi

6 eq. con σ e τ

(autonomous)

- CONGRUENZA:

[CO]

(∇ variabili in comune)

6 eq. con $\frac{u}{v}, \epsilon, \gamma$

(autonomous)

→ specifiche del modulo di C. elast. lineare

- LEGAME COSTITUTIVO

↓

deriva da considerazioni sperimentali

6 eq. con $\sigma, \tau, \epsilon, \gamma$

→

non introducono variabili, ma collegano σ e τ a ϵ e γ . Eq. alg. e diff., tutte LINEARI

↓

Se \exists soluzione una sola unica

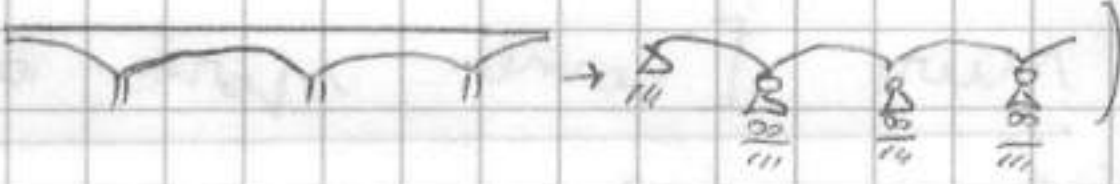
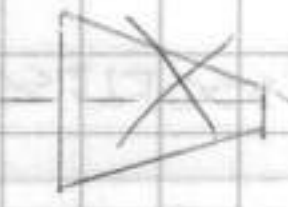
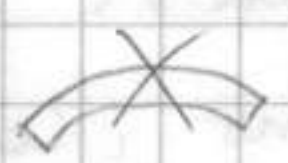
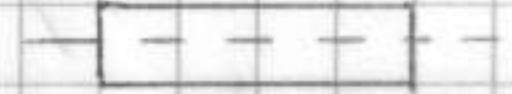
\exists serie di soluzioni particolari che "bloccano" i parametri in gioco, ad ex. x travi, archi, ecc...

↓

(SOLUZIONE PER LE TRAVI) → TEORIA DELLA TRAVE S. VENANT (classica)

Caso "geometrico". 1° ip: caso particolare del modulo di Cauchy.

Trave ha dim. prevalente sulle altre due, l'asse della trave x è rettilineo (\exists altre sol. x travi curve), sezione della trave deve essere costante (può essere diverso, ex. trave ponti
↳ qui sono esclusi.



Inoltre si fa ipotesi che le azioni su trave siano presenti

SOLO agli estremi → FORTE LIMITAZIONE (esclude



f. di volume → peso proprio - e carichi distribuiti.)

Per "zona di estremità" si intende la zona dello stesso ordine grandezza

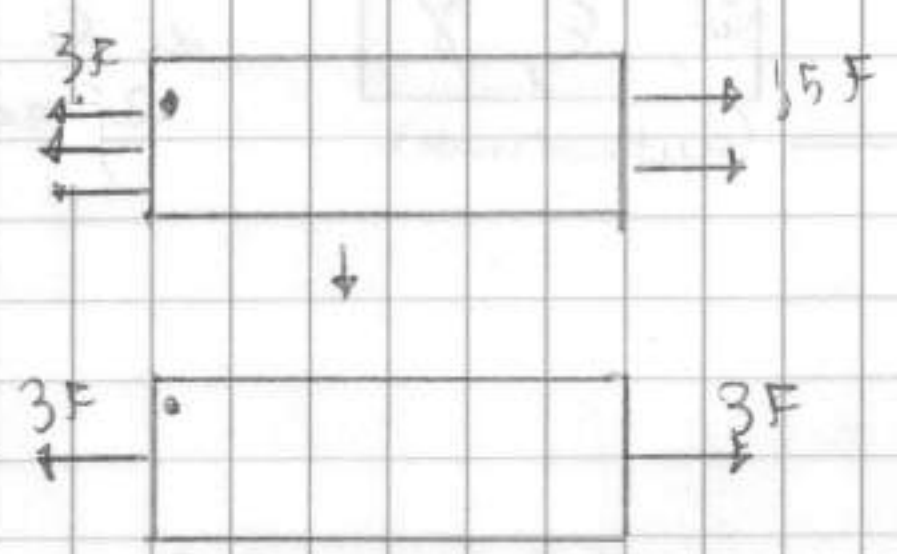
della dim. trasversale + piccola della trave. Se ho trave

5 x 10 x 20, l'estrem. è lungo 5 cm. ottimo x reatt. vincolari.

[Caro + ristretto].

Infine si considera il POSTULATO DI S. VENANT: "definito un set azioni rimp. alle ipotesi (F. alle estremità), queste generano delle σ e τ e ϵ , γ che data risultante delle forze e non σ data loro esse sono d'ipote, ESCLUSE le zone di estremità".

Ex: Applico 3F uguali a rx , a dx applico 2 F da 1,5 F. Il corpo è equilibrato. Sistema risultante e originario generano le stesse σ , ϵ , τ e γ . Ma localmente nelle zone terminali no, stati def. e terr. <>.



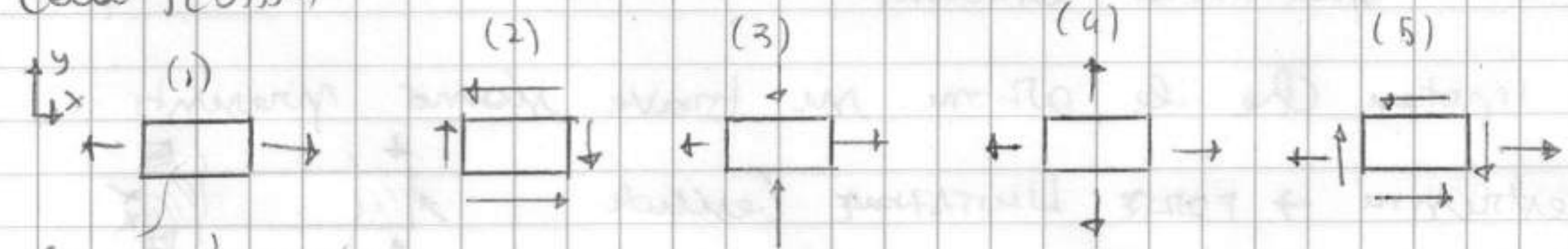
Allontanandosi si regolarizzano progressivamente.

Tipicamente trave di S.V. è divisa in 3 zone, le 2 estremità e il centro. Ci da la quantificazione della preponderanza di una dimensione. Ordine di grand. dell'approssimazione. Ex. nel rapporto 1:3 approssimale 66% trave, e quindi sbaglio. Se rapporto (h e L) $\leq 1:2$, trave \bar{x} . Teoria funziona bene per la parte centrale.

Si possono studiare travi rettilinee che σ hanno risultanti N, [1 caso di S.V], σ [2 caso] momenti agli estremi $\begin{matrix} \uparrow \\ \square \\ \downarrow \end{matrix}$; Ex: $\begin{matrix} \uparrow \square \downarrow \\ \uparrow \end{matrix}$, σ [3 caso] σ sono la combinazione di N e τ (che sono costanti), σ [4 caso] c'è la presenza di τ ($\begin{matrix} \uparrow \square \downarrow \\ \uparrow \end{matrix}$) \rightarrow c'è anche N, σ hanno solo momento torcente $\begin{matrix} M_t \\ \square \end{matrix}$. Questi sono i casi puri [come sforzi assiale e τ torcente si ha la PRESSOFLESSIONE]

(da MOHR)

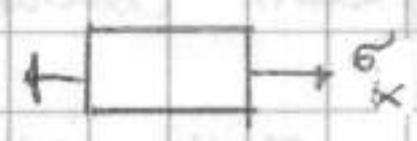
9/3/06

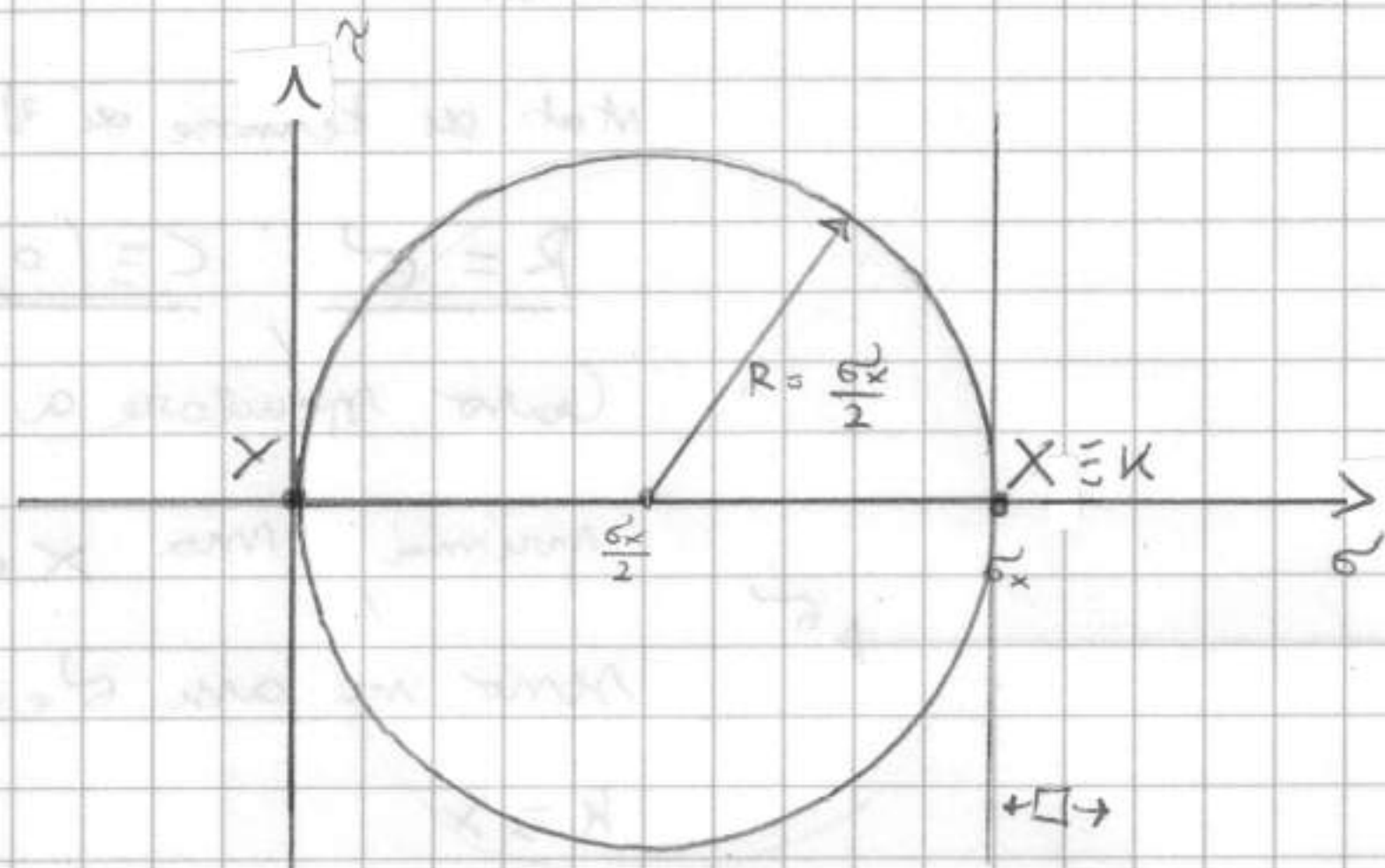


elemento $\frac{1}{\infty}$ isolato di Cauchy del quale consideriamo lo stato tensionale

Sint // ad ass trave e quello ad esso ortogonale

(76) 1) Qualsiasi P.to \in a trave e' sollecitato sia dallo stato tensionale sia TRAZIONE PURA (\exists a rx su COMPRESSIVE PURA, hanno stessa giacitura)

1)  Contr. il piano di Mohr:



$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$C \equiv \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

Qui $R = C = \frac{\sigma_x}{2}$ quindi σ_x è la max di tensione massimo che posso avere

+ Dobbiamo riconoscere lo st. di tens. della giacitura verticale (X) e orizz. (Y).

Qui $X \equiv (\sigma_x, 0)$ (avviamo su x è normale su piano di Mohr)

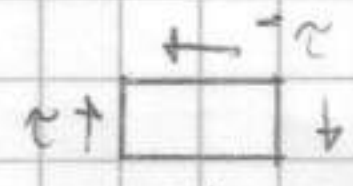
$Y \equiv (0, 0)$ (diam. opposto a X)

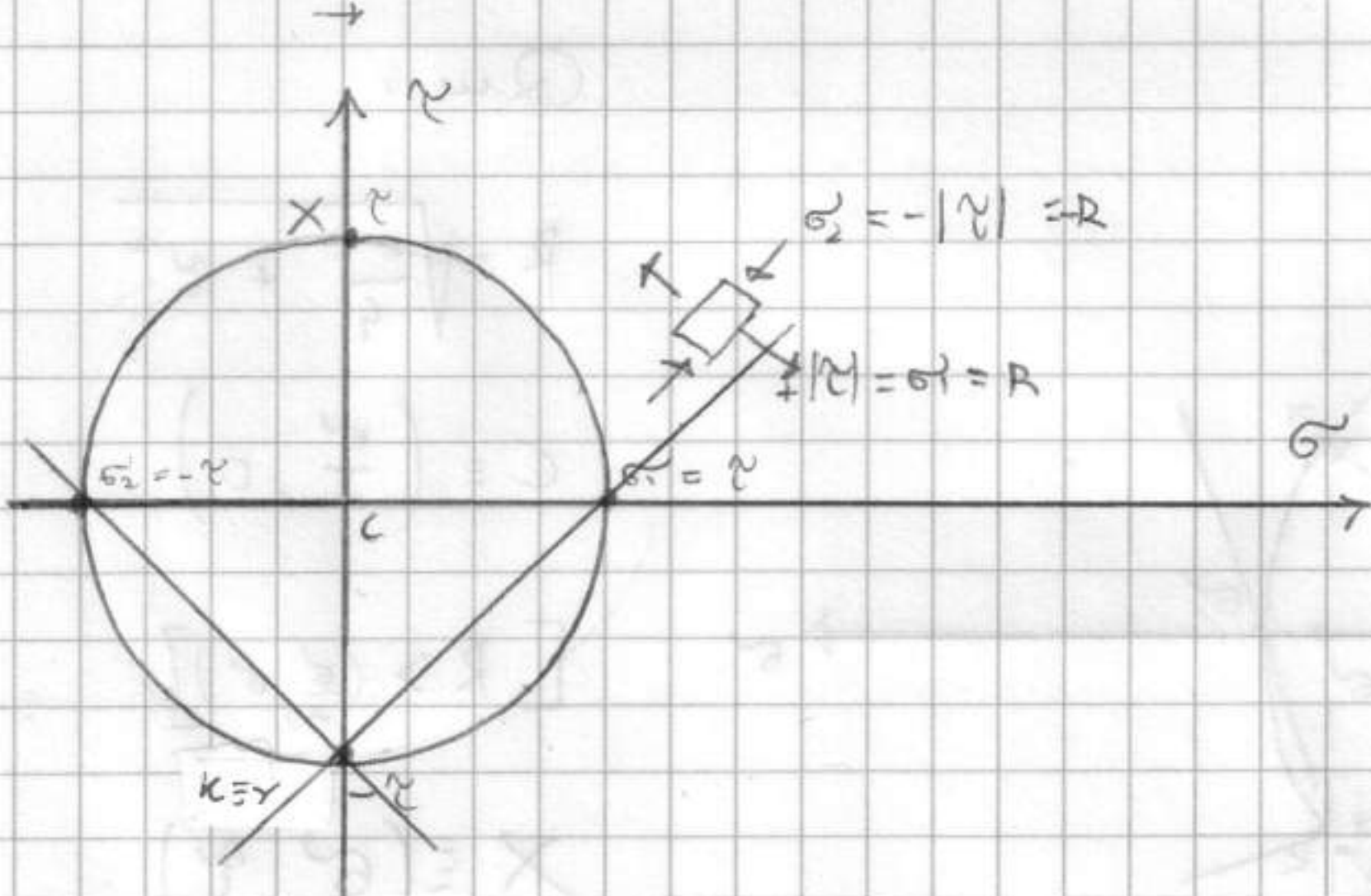
Il polo delle giaciture è all'incrocio tra X e Y. Quindi qui K è σ_x

o Y. A partire da K se traccio retta verticale dello stato X, se retta

orizzontale Y. Es: parto da Y e giungo, polo X \Rightarrow unica possibilità $X \equiv K$

$$\left(\tan 2\varphi = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \right) \rightarrow \text{angolo delle dir. principali rispetto alle dir. note} \quad [qui = 0]$$

2)  st. di PURO TAGLIO (in travi alte saldate ex. idromis T)



[positive = rot. in senso orario]

(face verticale = positive)

σ nulle, quindi $R = \tau$

$$C = (0, 0)$$

$$X \equiv (0, +\tau)$$

$$Y \equiv (0, -\tau)$$

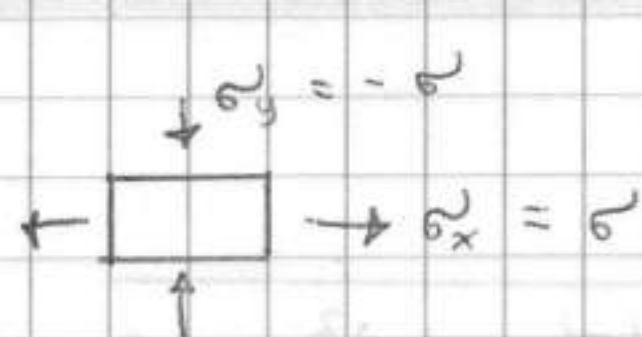
In questo caso Y è il polo K perché partendo da dir.

verticale ho X. Le dir. principali sono inclinate a 45° e

incrociano Y.

3)

(supponiamo i moduli identici) (ERRATA CORRIGE sul



libro dove intere gli
Matr di tensione di 3) e 4))

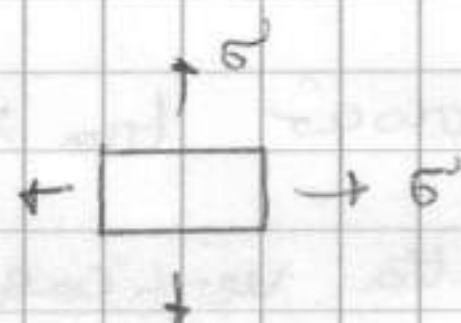
$$R = \sigma, \quad C \equiv (0, 0)$$

Contra normale a
prima, ma x e y
sono su assi σ e non τ
 $k \equiv x$

Ritorno lo stato di
pure taglio su elementi

inclinato a 45°

4) (Caso "isostatico")

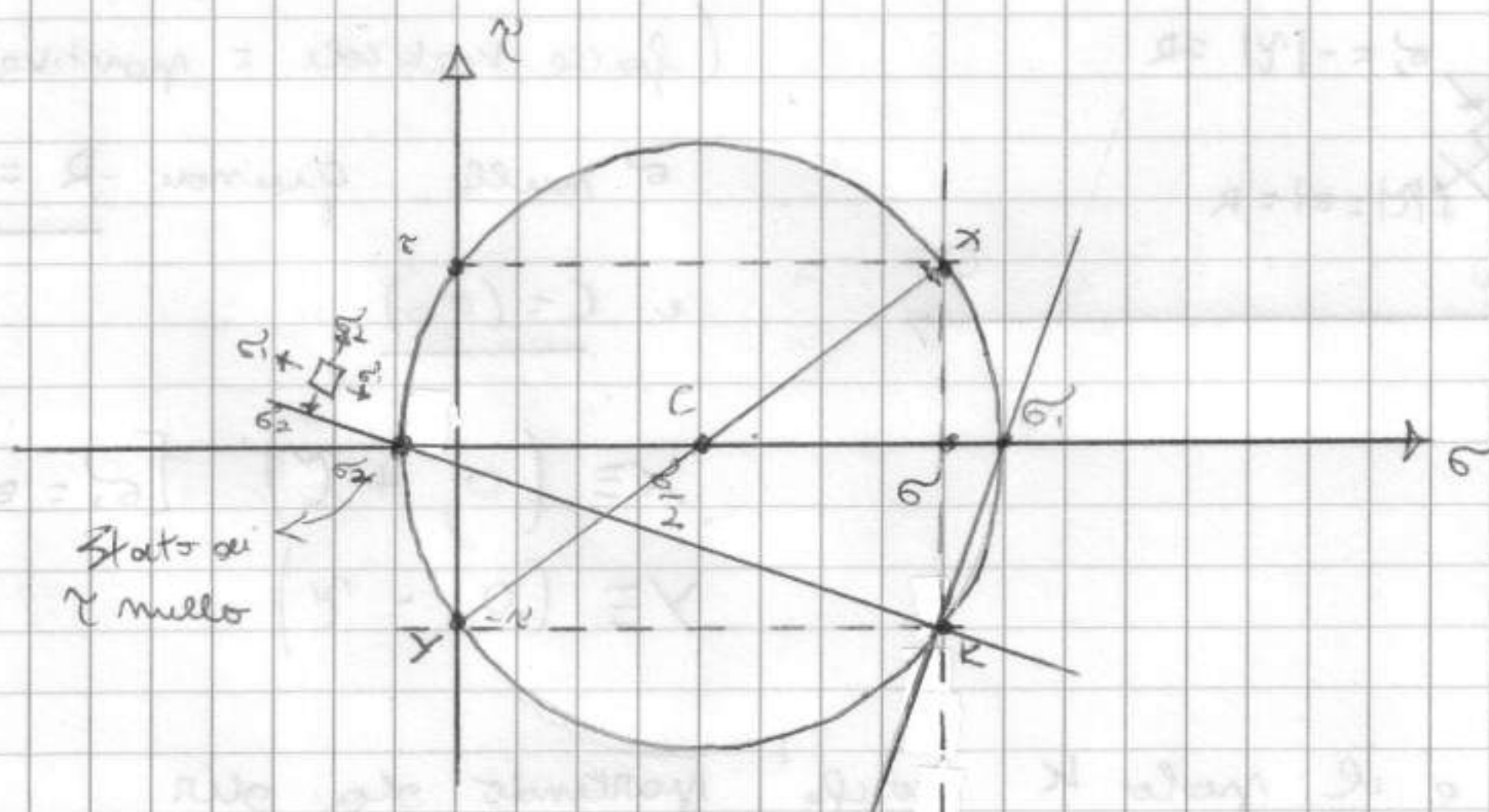


Qui $R = 0$ (Casi. degenera
in un punto, il centro

invece e' in $C \equiv (\sigma, 0)$ Quindi $x \equiv y \equiv k \equiv \sigma \equiv C$.

5)

(Caso + Comune).



Qui:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

$$C \equiv \left(\frac{\sigma}{2}, 0\right)$$

$$[R > (\frac{\sigma}{2}, \sigma)]$$

$$X \equiv (\sigma, \tau)$$

$$Y \equiv (\sigma, -\tau)$$

Tracciando la Vert. da X e e' sulla. da Y ho k

H

48

GEOMETRIA DELLE AREE

Studiamo il solido trave. Modello di continuo e' di un solido generico e c'è relazione col materiale che costituisce il solido.

Trave e' particolare solido di Cauchy.



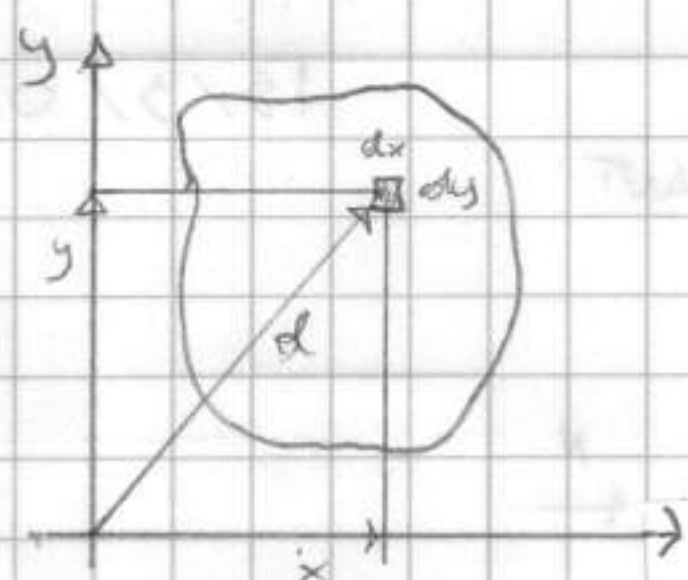
$$\frac{L}{h} > (\approx 8) \rightarrow \text{TRAVI SNELLE} \quad \text{Teoria di S.} \quad [L, m]$$

V. ci fa passare da stato sollecit. calcolato a stato term. $[\sigma, \tau] \rightarrow$ lo fa

tramite la def. delle grandezze geometriche tramite le quali c'è

questo passaggio [da stato di sollecitazione $N, T, M \leftrightarrow \sigma, \tau, \epsilon, \gamma$],

cioè l'AREA, il MOMENTO STATICO (S) e MOMENTO D'INERZIA (I)



Cons. elemento $\frac{1}{\infty}$, $dA = dx dy$. Quindi

$$A = \int_A dx dy \quad [L^2]$$

- il MOMENTO STATICO "per" la q. di area risp. ad una distanza, varia risp. all'asse di riferimento risp. al quale è calcolato. Quindi:

$$S_x = \int_A y dx dy$$

$$S_y = \int_A x dx dy$$

con dimensioni $[L^3]$

- il MOMENTO D'INERZIA "per" l'area risp. alle d^2

$$I_x = \int_A y^2 dx dy$$

$$I_y = \int_A x^2 dx dy$$

Proprietà:



Se sist. è baricentrico, $S_x' = S_y' = 0$

Cio' perché la f. al quadrato nell'int. definita

annulla il segno, rimane x quello delle distanze.

Sopra si somma, sotto a y si sottrae e quindi

essendo origine nel baricentro la $\Sigma = 0$. Se tratto il sist. risp. (79)

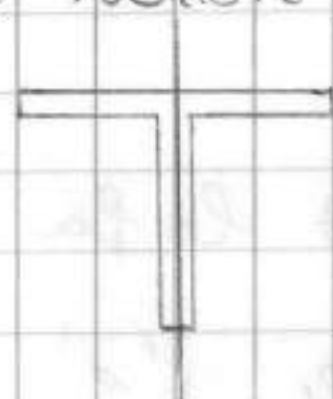
di x_c, y_c e trasformo le coordinate, si ha che:

$$S_x = \int_A (y' + y_c) dA = \int_A y' dA + \int_A y_c dA = y_c A \rightarrow \text{TEOREMA DEL TRASPORTO DEL MOMENTO STATICO}$$

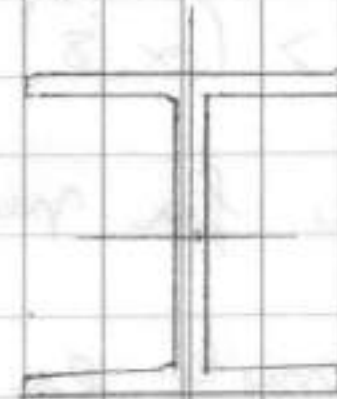
\downarrow
 A y A A \leftarrow è una costante
 (so da prima)

Utile x il calcolo del baricentro \rightarrow $y_c = \frac{S_x}{A}$ e $x_c = \frac{S_y}{A}$

Se sezione ha assi di simmetria, baricentro è sicuramente li. Es:



Se è doppiam. simmetrica è all'incrocio:

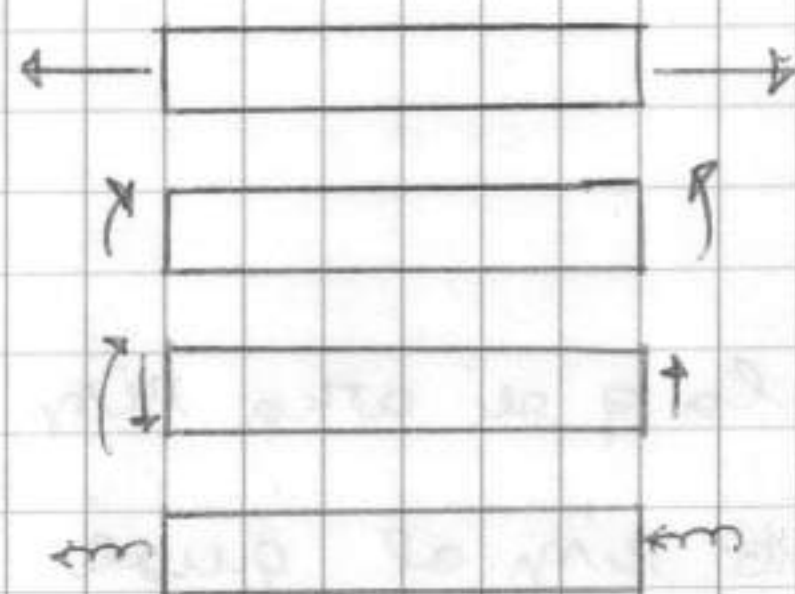


Per il mom. d'inerzia risp. a qualsiasi riferimento posso scrivere:

$$I_x = I_{x'} + A y_c^2$$

13/3/06

CASI BASE TRAVE S. VENT



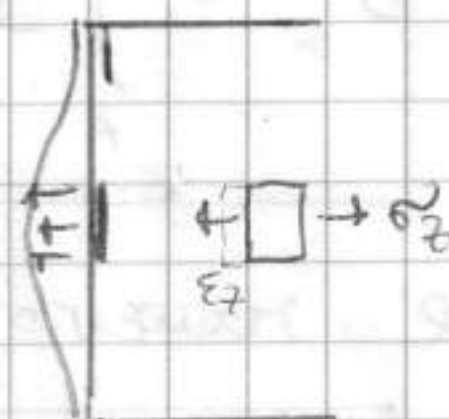
Ci sono altre parti in contatto con una interazione sulla sup. esterna.



Supponiamo che N derivi da distrib. di forze tipo la press. di una molla. Come si deforma il solido?



C'è zona centrale

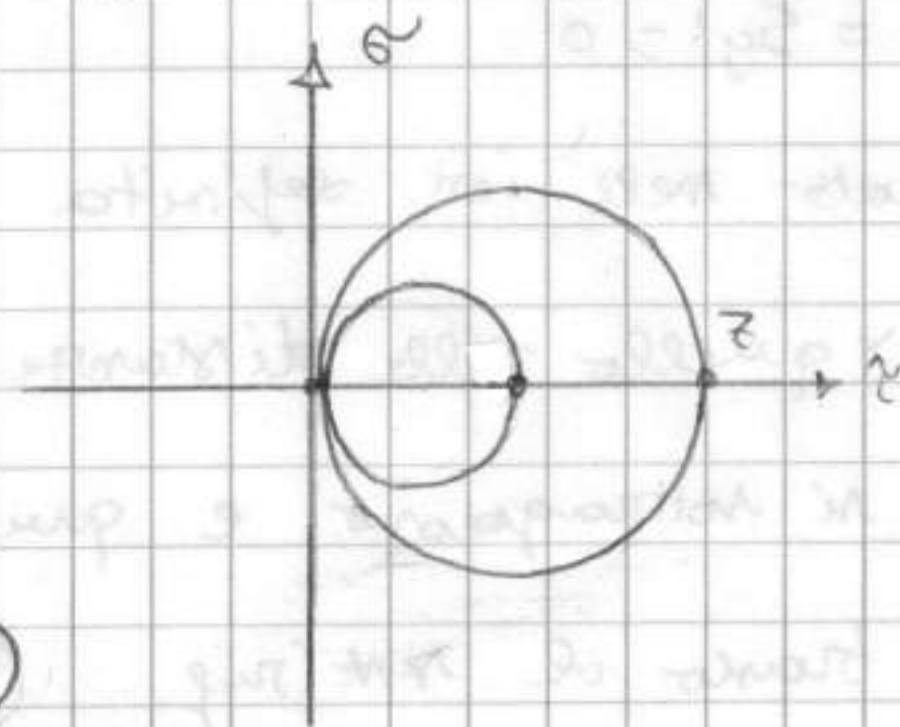


parte caricata dove elemento soprattutto si allungherà

Analogo a zona lontana, solo che all. è + piccolo e abs.

uniforme [TRAVE SU SUOLO ELASTICO].

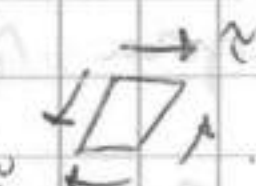
Circ. di Mohr del tratto centrale [trazione pura] (\approx uniforme)



Ho già le terr. principali. Nella

zona + lontana ho circ. + piccola

Prob. e zona intermedia dove ho var.

angolari " "  Siamo fuori da

sup. caricata, c'è quindi scissa

prevalenza γ , qualit. ho def. angolare.

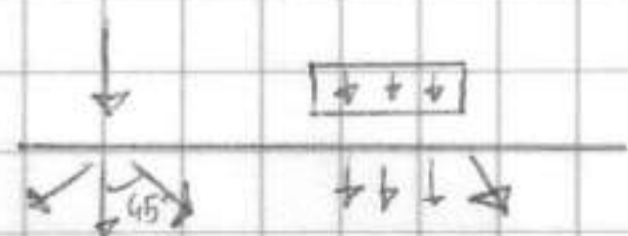
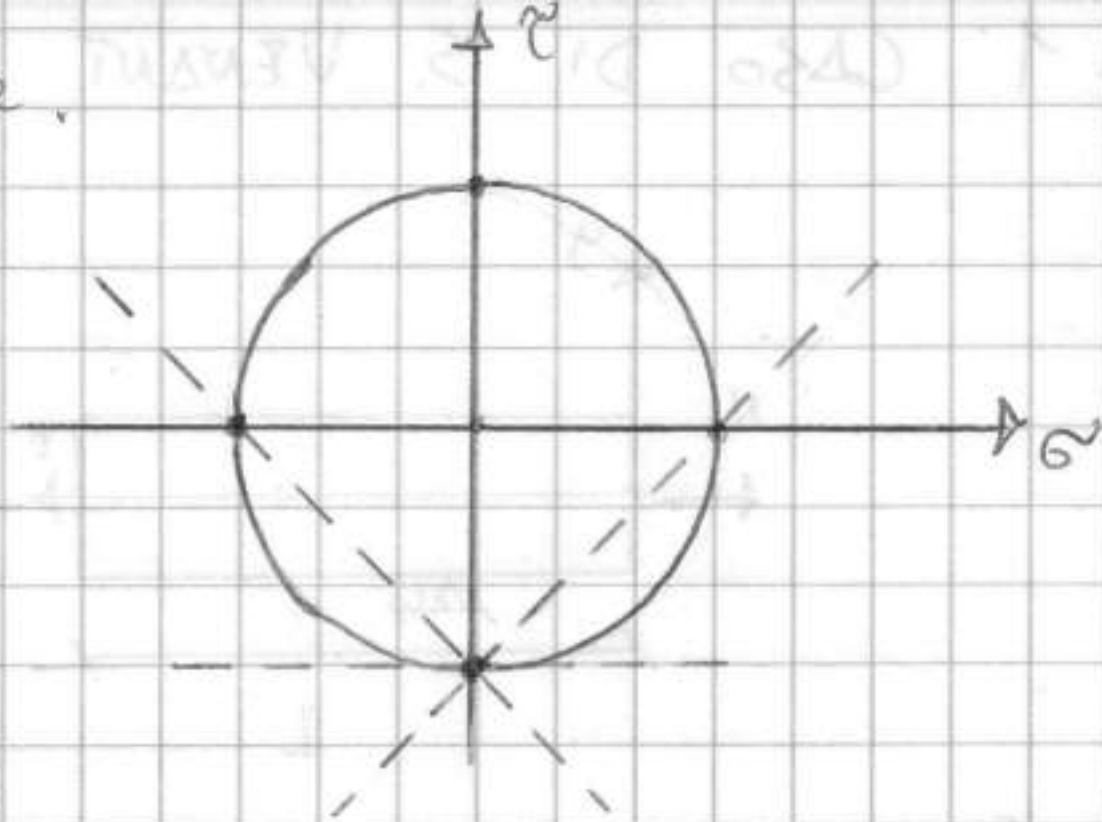
Origine e' \equiv piano di Mohr. Ho

rette inclin. a 45° ! In ogni sistema

elastico caricato localmente, c'e'

zona soggetta a σ_m , zona sollecitata,

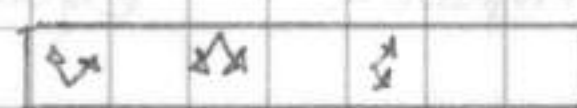
e zona intermedia dove tens. sono a 45° .



→ nel tratto affianco a zona caricata. Questa
e' la portanza del fenomeno.

Supponiamo note le tensioni del solido e calcolo le tens.

principali. Si possono fare degli INVILUPPI



Ex: trave soggetta a N: ho le linee di



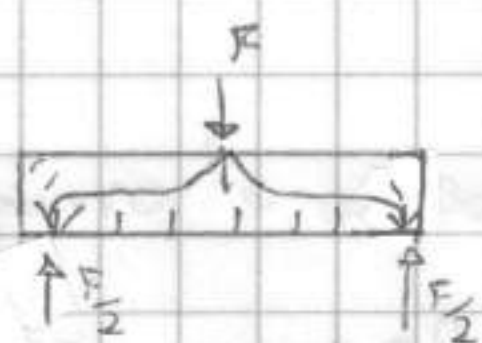
inviluppo delle ISOSTATICHE (stesse tensioni).

Allontanandosi, verso il bordo tens. girano

e si mettono // ad axe trave e si

ricongiungono. Fenomeno e' continuo.

Ex: trave appoggiata [2 mezze travi di s. Venant]

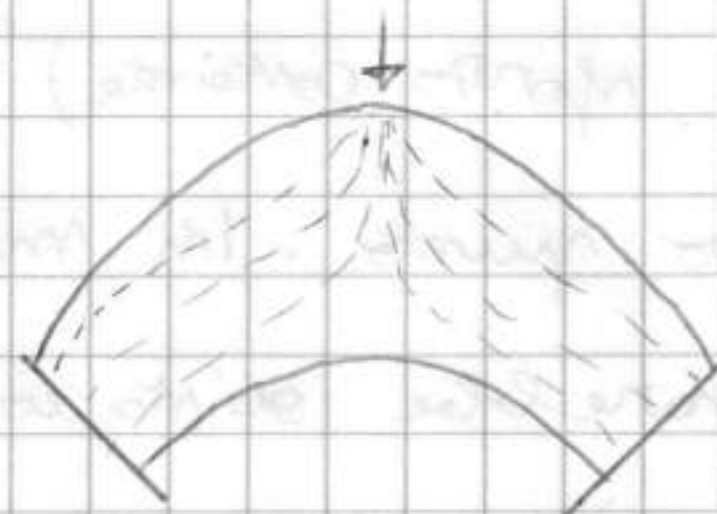
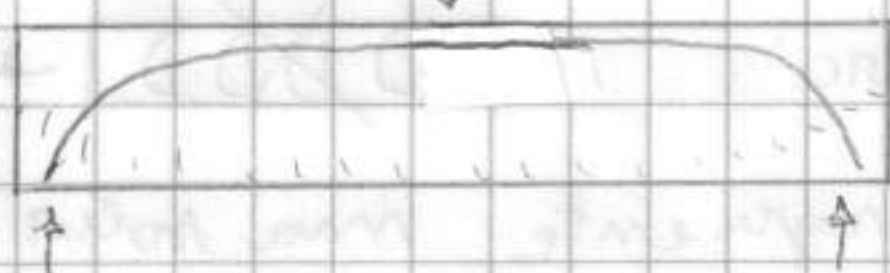


→ Isostatiche di trazione (gli inviluppi a compressione
marcano \perp) Parte inf. e' tesa, sopra e' compressa.

M ha max. al centro.

Se ho trave + lunga:

Ex: arco caricato



Si trovano in composti organici: ex. Legno. Su albero agisce

vento che spinge su chioma [membr. con carico in testa]

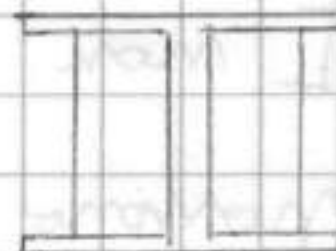
E' sottoposto a flessione, e fibre quindi si disp. verticalmente.

Onno porta N e ha cerniere, f. state all'estremo del muscolo

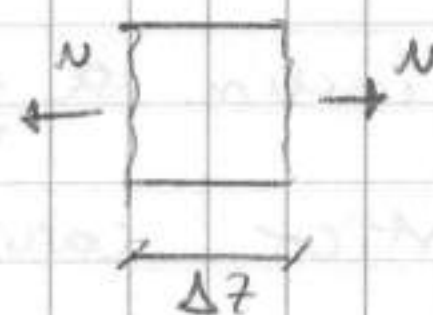
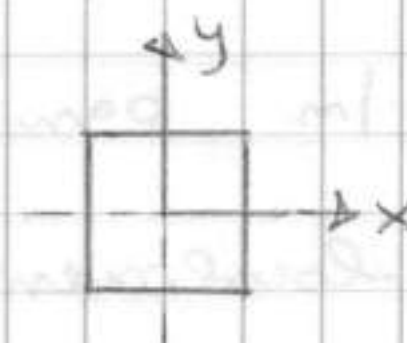
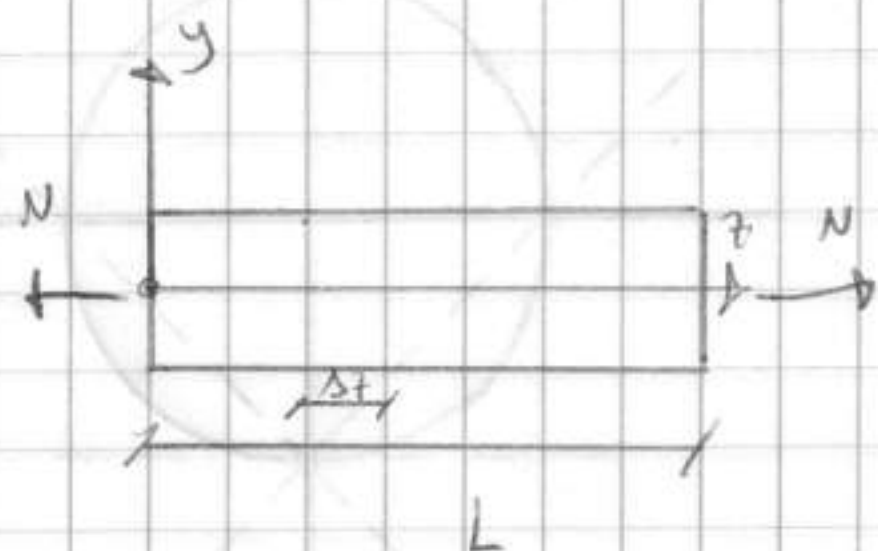
dove e' + grande (solle + materiale e + resistenza)

Fattori di irrigidimento agli estremi dei

donni Ta causa della <> distrib. sparti.



1. CASO DI S. VENANT (Sforzo Normale)



Suppongo ser. trave a doppio asse di simmetria. Devono valere l'eq. di equilibrio, congruenza, ecc... Devo:

- 1) Comprendere la CINEMATICA del corpo deformabile
- 2) Introdurre il legame costitutivo
- 3) Imporre l'equilibrio

II Dopo la deform., la trave come diventa? Come e' fatta linea d'asse e come si muovono le sezioni?

Linea d'asse init. e rettilinea, quindi non può curvare verticalmente e orizzontalmente \Rightarrow rimane retta (può allung. e accorc.)

Le sezioni all'inizio non rette (piano \perp ad asse). Possono ingobbarsi?

Qui c'è piano di simm. verticale, quindi se \exists la def. devono essere simm. alla mediana.

Prendo Δx qualsiasi, ho stesso allungamento [solido e omogeneo]

(con sforzo costante) \Rightarrow sezioni se si ingobbano lo fanno allo stesso punto. In meccanica ho ma non avrei la CONGRUENZA

ci sarebbe slittato \Rightarrow non possono esserci. +

non rispetta simmetria; \rightarrow sim. e congruente ma soluzioni

variano da zona a zona. [ragionamenti escluso estremi].

«Nella realtà c'è allargamento locale agli estremi, ma poi ser. sono piane e //»

Che tipo di moto possono avere? \rightarrow non rispetta la simmetria, no rot. intorno ad asse x e y. Neanche ad asse z

[non c'è 2° simmetria] \Rightarrow sezioni rimangono piane e

82 possono solo allontanarsi e avvicinarsi \Rightarrow Soluzione e'

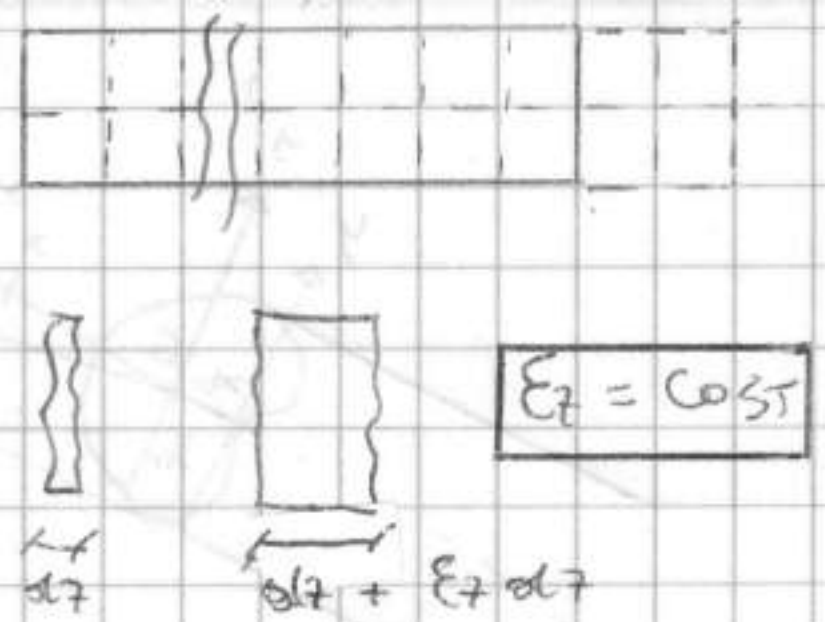
allungamenti ass e allontanamenti

costante delle sezioni.

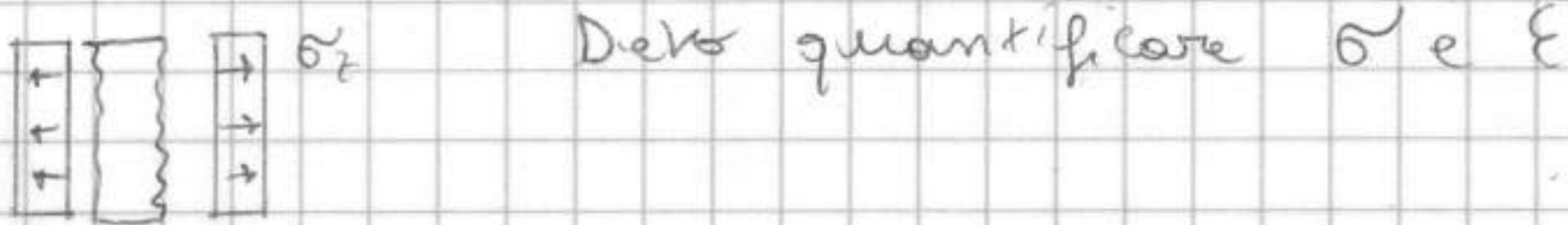
Quindi con qualsiasi pezzo [con $\frac{1}{\infty}$]:

c'è distrib. costante di ϵ e \exists

[solo conr. lineari]



2] σ_z e' COSTANTE (ϵ e ϵ costanti) nell' altezza



3] Eq. riferita a con $\frac{1}{\infty}$: \rightarrow EQUILIBRIO DI UNA SEZIONE

Rimane l'eq. alla traslazione: $-N + \iint_A \sigma_z dx dy = 0$. Si ha

$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$

\rightarrow tensione e' uniforme nelle sez. vert.

$$\epsilon_z = \frac{N}{E \cdot A}$$

(e' def. trasversale x effetto Poisson)

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z = \frac{-\nu N}{EA}$$

e

$$\Delta L = \epsilon_z L = \frac{\sigma_z L}{E} = \frac{N L}{EA}$$

\Downarrow

Soddisfatto le 18 eq.

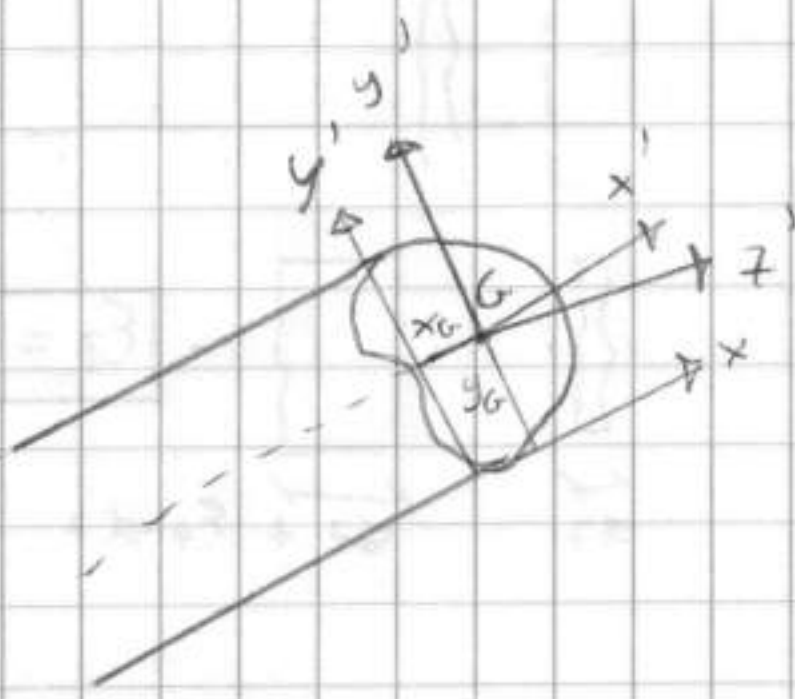
Se $\frac{\partial W}{\partial z} = \epsilon_z$ con $\epsilon_z = \text{cost}$, W e' lineare. Punti si allontanano dall'estremo con andamento lineare ($\Delta L = x$ tutti).

Non c'è la lunghezza della trave [e' nelle sollecitazioni, non in conr. locali] $E \cdot A$ definisce la RIGIDEZZA DI SEZIONE della trave. Area rappresenta dirett. la q. di materiale presente, \neq dalla posizione \Rightarrow NON CONTA la forma della trave.

Per altri conr conta anche la posizione. Passando all'elemento strutturale in conr. anche L . EA/L e' rigidezza dell'intera trave. Trave corta e' + rigida di trave lunga. Rapporto tra F applicate e allungamenti. Le dim. sono di F/L x un elemento strutturale.

Baricentro sez. non

$$\text{simmetrica: } x_G = \frac{S_y}{A}; \quad y_G = \frac{S_x}{A}$$



$$\left. \begin{aligned} S_y &= \int_A x \, dA \\ S_x &= \int_A y \, dA \end{aligned} \right\} \text{Mom. STATICO}$$

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 \, dA \\ I_y &= \int_A x^2 \, dA \end{aligned} \right\} \text{Mom. INERZIA}$$

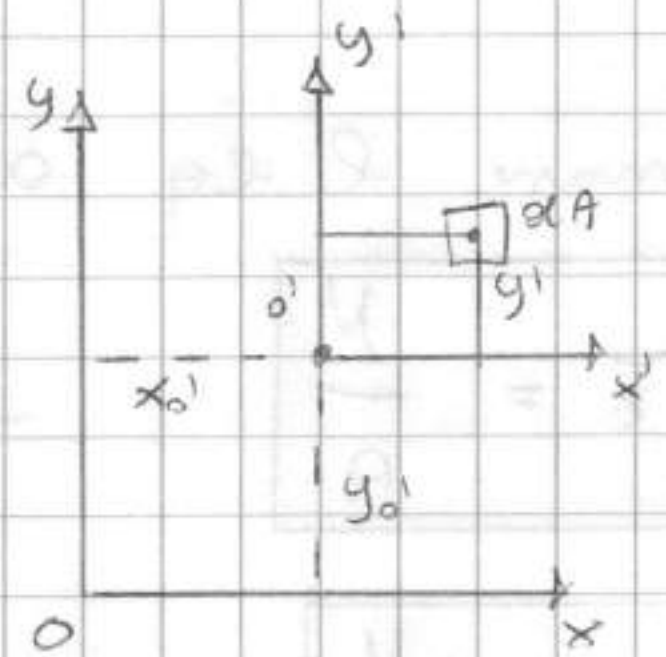
Il mom. inerzia misto (rapp. a 2 assi separati):

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

TEOREMA DEL TRASPORTO PER IL MOMENTO D'INERZIA

Sist. rif. trasla in x', y' .

$$I_x = \int_A (y_0' + y')^2 \, dA; \quad y = y_0' + y'$$



$$\int_A (y_0'^2 + 2y_0'y' + y'^2) \, dA = y_0'^2 \int_A dA +$$

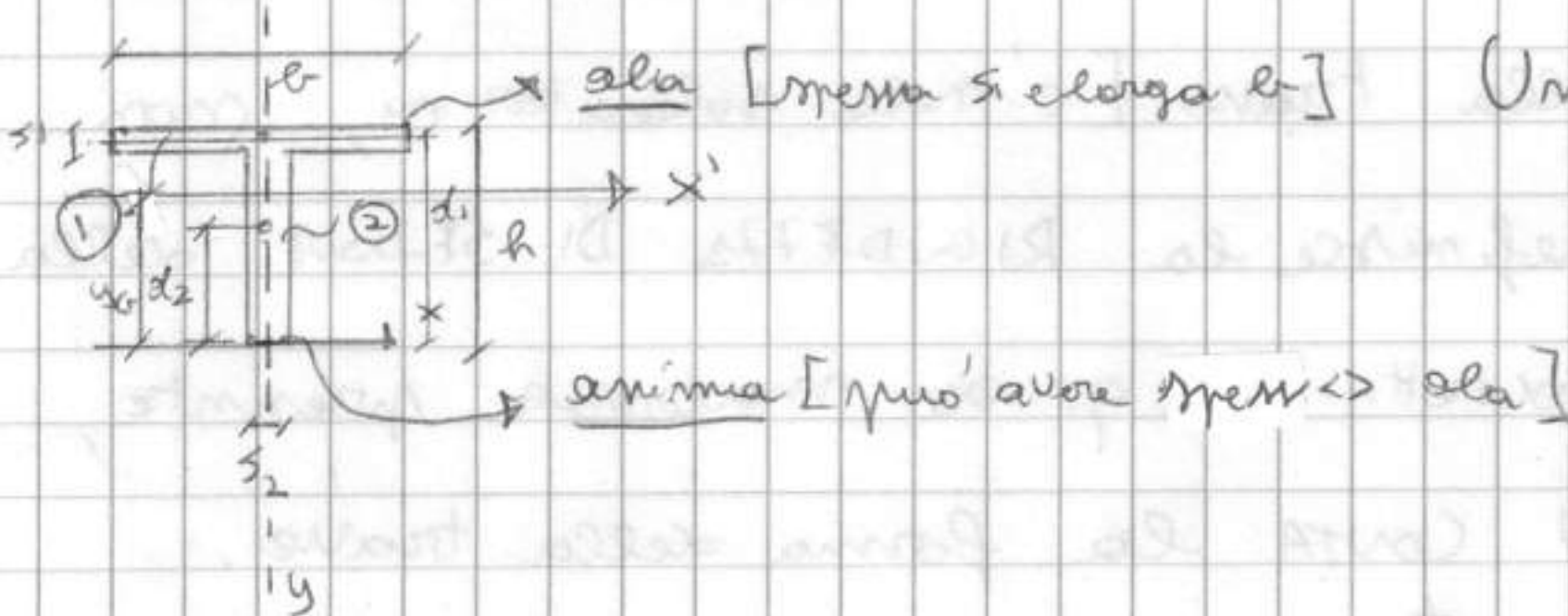
$$+ 2y_0' \int_A y' \, dA + \int_A y'^2 \, dA =$$

$$= \boxed{y_0'^2 A + 2y_0' S_{x'} + I_{x'}} \quad \begin{array}{l} \text{mom. r. rispetto} \\ \text{al nuovo sistema} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{nel nuovo} \\ \text{sistema} \end{array} \rightarrow \text{Se } x', y' \text{ e' baricentrico,}$$

allora il termine relativo a S si annulla, quindi $\boxed{I_x = I_{x'} + y_0'^2 A}$

(se x', y' e' baricentrico).

Ex: sez. acciaio a T.



Unico asse simmetria, y in verticale.

Baricentro e' lungo l'asse
Posizione Calc. con $y_G = S_y/A$.



Fissiamo asse x nell'introduzione [parte inf. sezione] (parte sup. e' estrazione) e calcoliamo S_x . Dividiamo sez. in 2 rettangoli [1 = ala, 2 anima]. $S_{x1} = \cancel{S_{x1}} + A_1 d_1$ ($d_1 = h - s_1/2$)

$$\textcircled{84} \text{ Quindi } S_{x1} = s_1 \cdot b \left(h - \frac{s_1}{2} \right). \quad S_{x2} = A_2 \cdot d_2 = s_2 (h - s_1) \cdot \left(\frac{h - s_1}{2} \right) \rightarrow$$

$S_{x_2} = S_2 \left(\frac{h-s_1}{2} \right)^2$. $S_x = S_{x_1} + S_{x_2}$ Th. trasporto (sia x che per 3) e utile a figure compatibili in figure piatte semplici.

Quindi $y_G = \frac{S_x}{A}$. Ci interessa il mom. d'inerzia baricentrico per i calcoli. Sfruttiamo th. trasporto.

I_{x_G} = (diviso in 2 rettangoli

dei quali si calcolano Per una sot. rettangolare: i mom. baricentrici)

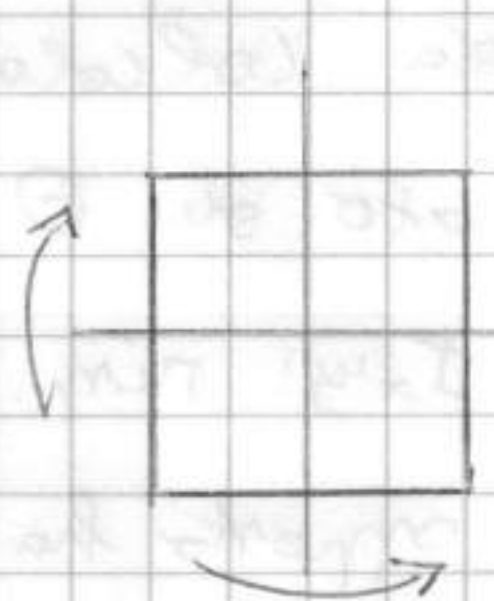
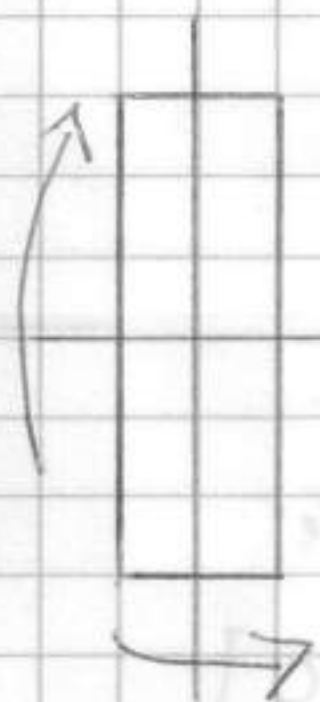
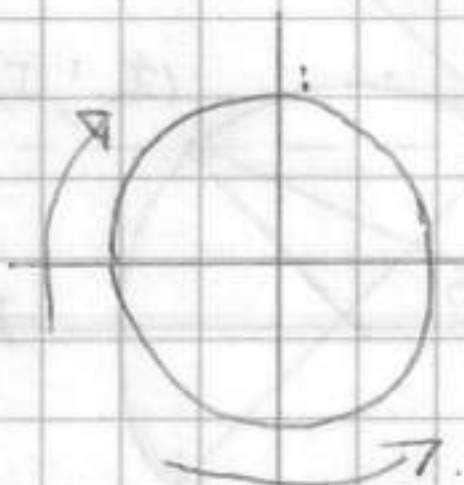
$$= I_{x_G}^{(1)} + I_{x_G}^{(2)}$$

$$I_{x'} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad , \quad I_{y'} = \frac{h \cdot b^3}{12}$$

$$= \frac{b \cdot s_1^3}{12} + b s_1 \left(h - y_G - \frac{s_1}{2} \right)^2 \quad ; \quad I_{x_G}^{(2)} = \frac{s_2 \cdot (h-s_1)^3}{12} + s_2 (h-s_1) \left(y_G - \frac{h-s_1}{2} \right)^2$$

[formule direttamente utilizzabili]

H



Azione momento flettente, ognuno reagisce in maniera diversa.

Tra i reagenti a flessione in base a quanto area c'è dist. dagli assi.

Sez. circolare: $I = A r^2$ che passa x baricentro. Sezioni reagiscono in base a giacitura risp. al quale calcolo I .

Compr. il sist. rif. e lo ruota: I_{usua} !

Si può def. I_{ux} e I_{uy} della sezione? Sì, tramite rapp. geometrica

analoghi a piano di Mohr che dà le

direzioni di I_{ux} e I_{uy} , detti momenti di inerzia PRINCIPALI.

Si fa imponente la rot. risp. a θ .

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad I_{x'} = \int_A y'^2 dA \quad \text{dove}$$

$$\begin{cases} x' \\ y' \end{cases} = \begin{cases} \cos \theta x + \sin \theta y = x' \\ -\sin \theta x + \cos \theta y = y' \end{cases} \quad \text{Sostituendo } \underline{I_{x'}} =$$

$$= \int_A (-\sin \theta x + \cos \theta y)^2 dA = \underline{I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta I_{xy}}$$

Infine, se θ , esprimo I nelle nuove coord. ruotate rispetto a I già noti $I_{x'y'}$:

$$\underline{I_{x'y'}} = (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

[Analogia con θ e φ senza passaggi trigonometrici]. Con stesso procedimento

si descrive nel piano I_{mm} [il punto generico risp. a sist. ruotato]

/ I_{mm} [il punto a stesso ang.] e andamento dei I con circonferenza

che in ogni suo punto rappresenta

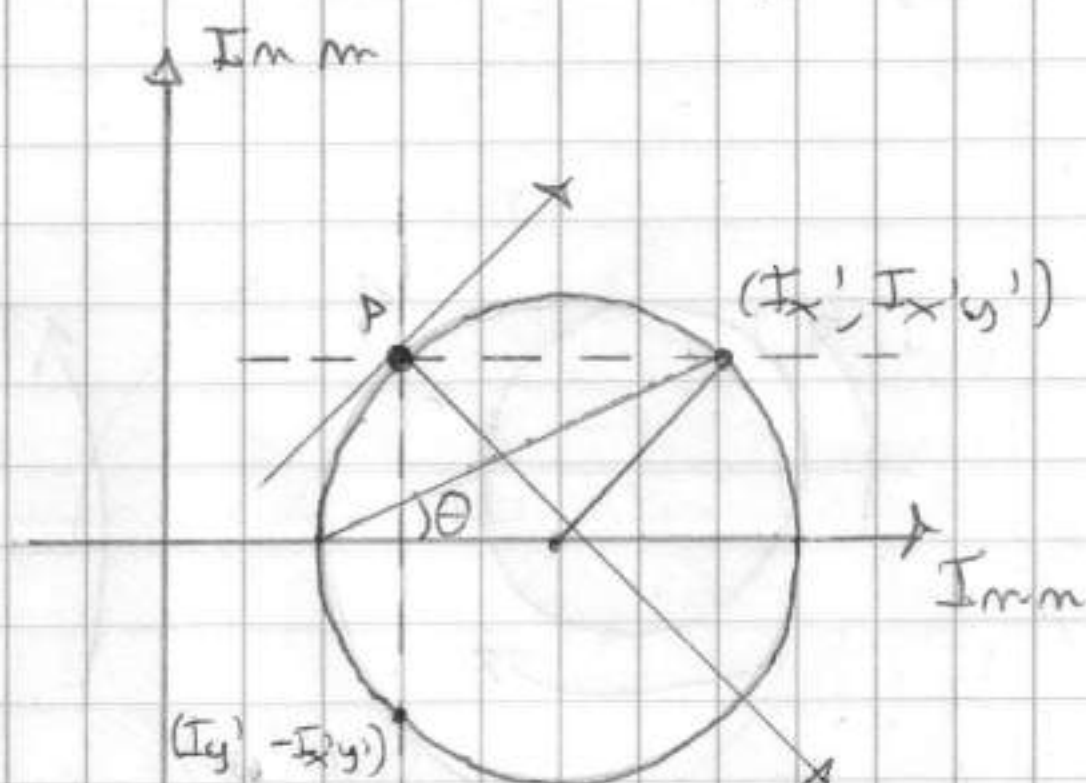
coppia mom. inerzia calcolati risp.

a sist. rif. ruotato di θ .

Se conosco $I_{x'}$, $I_{x'y'}$ risp. ad angol.

θ , quello diam. opposto ha coordinate

$(I_{y'}, -I_{x'y'})$ [il punto può essere < 0]



Rispetto al "polo P" delle giaciture si possono definire le dir. princ.

Ex: ser. a T può essere ruotato in maniera qualsiasi, fino a sist. di

come i bracci (inclinato di θ). Conosco I lungo

il sist. rif. orig. Verticale, posso calc. $I_{x'}$, $I_{x'y'}$



Sono i max e min. / No! Dir. invariata da x', y' che si invariano

in P. Da qui si trova sist. rif. x dove val. max. e min.

Nei prob. di flessione la ser. di dir. si ruotano. Al variare

della giacitura non è detto che fornisco ser. max. Se sezione

è DOPPIAMENTE SIMMETRICA, anzi oltre ad essere baricentrica sono

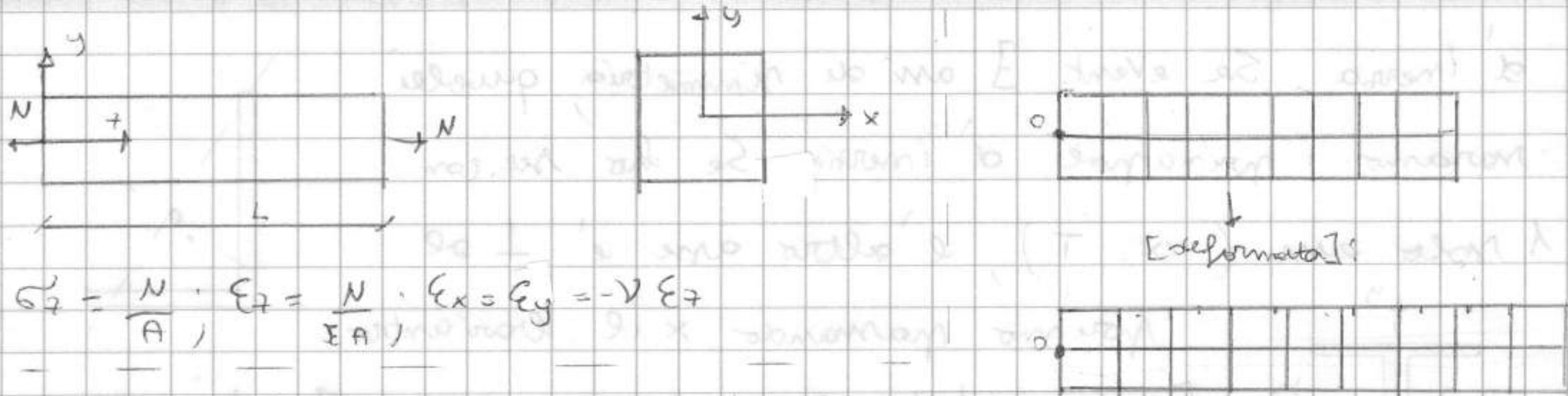
ASSI CENTRALI D'INERZIA (PRINCIPALI)

[da 1° corso S.V.] 6+6+6 equazioni.

16/3/06

86

Non $\exists \varphi \Rightarrow \nexists \gamma$ Tutte le fibre e le dir. sono // alla



$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \quad \epsilon_z = \frac{N}{EA}, \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z$$

Config. iniziale Eq. Reciproca non è 0=0.

Le eq. inel. di equilibrio hanno $\kappa=0$ e sono presenti solo le $\partial \sigma$.
Nelle anche le forze di volume. Mi rimane $\partial \sigma_z$, ma è costante.

∇ termini nella 4° sottomatrice. σ_z c'è,

infatti $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ associati

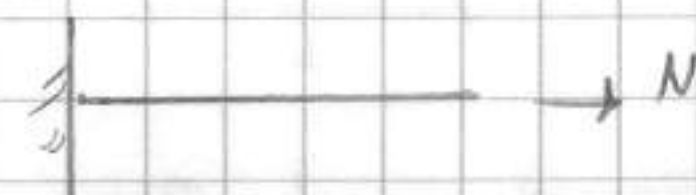
	σ_z	ϵ_z
ϵ	E, ν	0
γ	0	$\frac{1}{G}$

Eq. congruenza: 1° $u, v, w \rightarrow \epsilon$, 2° gruppo è

nullo ($\nabla \nabla$). C'è ϵ_z ! $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ [primarie] = $\frac{N}{EA}$, quindi

$w = \frac{Nz}{EA} + \text{cost}$. Fissata 0 x lo spostamento, schema statico:

(uno tra i possibili). Allontanandomi dal



vincolo lo spostamento assoluto cresce.

ϵ anche le ϵ_x e le ϵ_y [uguali]: $\epsilon_x = -\nu \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\nu N}{EA} \Rightarrow$

$$u = -\frac{\nu N}{EA} x + \text{cost}$$



Trova si restringe tutta ocella

stessa quantità (eff. Poiss.). Rettangolo filare rett., il baricentro

non si sposta ma spost. lungo l'asse x varia e il più esterno si



sposta di $-\frac{\nu N}{EA} \frac{b}{2}$. Effetto ∇ su ∇ spost. di travi

con dim. prevalente si TRASCURA.

ex: spost. di un terreno su galleria di c. murata,

se materiale si estende effetto poiss. la contatto,

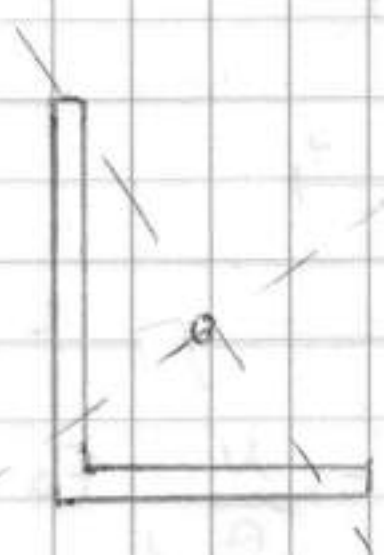
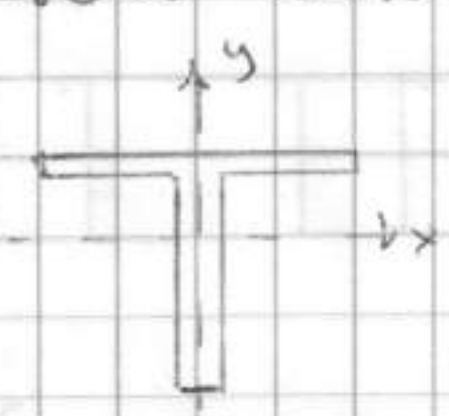
ma nella trave della si trascura

Trattazione Contr. 2° asse simmetria, ma la sol. è valida in

GENERALE Ex. sot. a L asimmetrica. ∇ sot. su trave ϵ

delle proprietà di simmetria necessaria (gli assi principali)

d'inerzia. Se event. 3 assi di simmetria, quelli saranno i principali d'inerzia. Se ho sez. con 1 solo asse (es. T), l'altro asse e' \perp al primo passando x il baricentro.

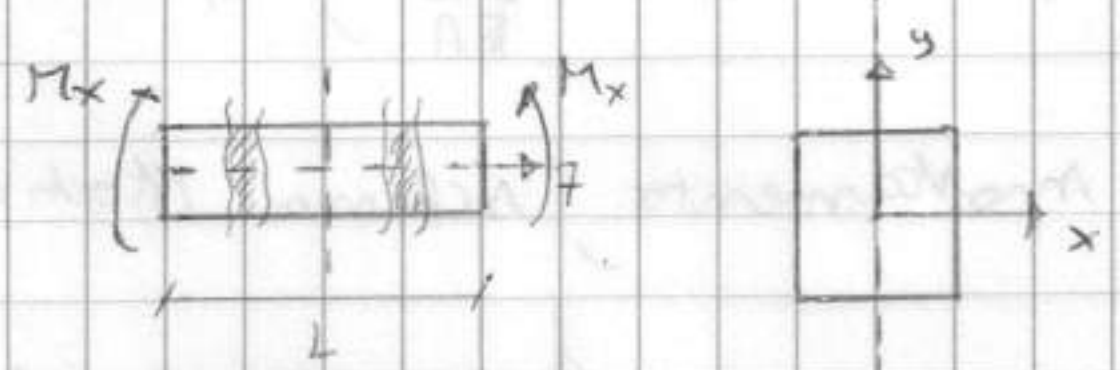


[Sol. già tabellate x trovarle in uso]. Discussione

Valle sempre se come giacitura si conv. gli assi principali d'inerzia. Sono assi di simmetria di comportamento. Area \neq la forma, cambiando il sistema cambia E_x e E_y (ovviamente, si all. e string. lungo le dir.) ma non ha riflessi progettuali.

H

2° USO DI S. VENANT (FLESSIONE SEMPLICE RETTA)



fenomeno non e' accompagnato da altre sollecitazioni

Conv. sez. con 2° assi di simmetria

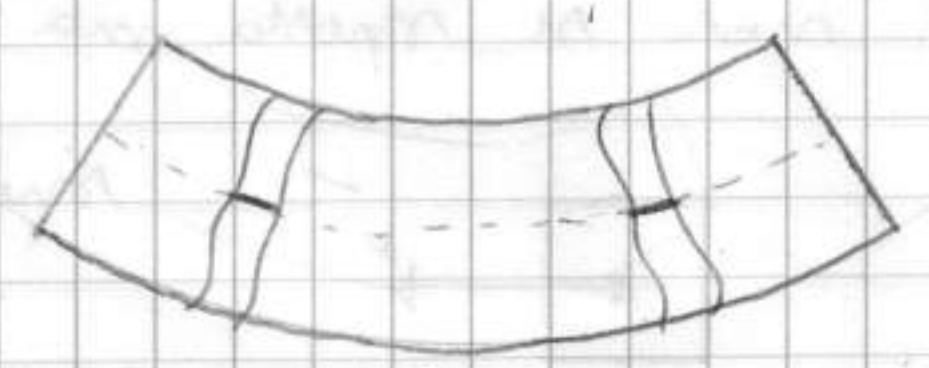
"RETTA" xhe flessione e' π solo attorno a 1 dei due assi

[Non dirlo se prendiamo altra figura ma conv. assi prin. inerzia]

Stesso procedimento 1° caso.

- Qui 3 simmetrie risp. al piano \perp asse trave e a Z_y , ma non c'e' risp. a xz : geom. si, ma le sollecitazioni no! \Rightarrow asse non può ribaltare a dx o a sx, ma può incurvarsi in Z_y . Che curva?

Preso con la qualsiasi, nella deformata si incurveranno nello stesso modo, quindi



deve essere una CIRCONFERENZA (π e' COSTANTE lungo l'asse!) Non no se asse si allunga o meno.

Suppongo che p.ti di sezione iniz. stette escono dal loro piano.

Sez. può ingobbarsi! \rightarrow sol. deve essere simmetrica;

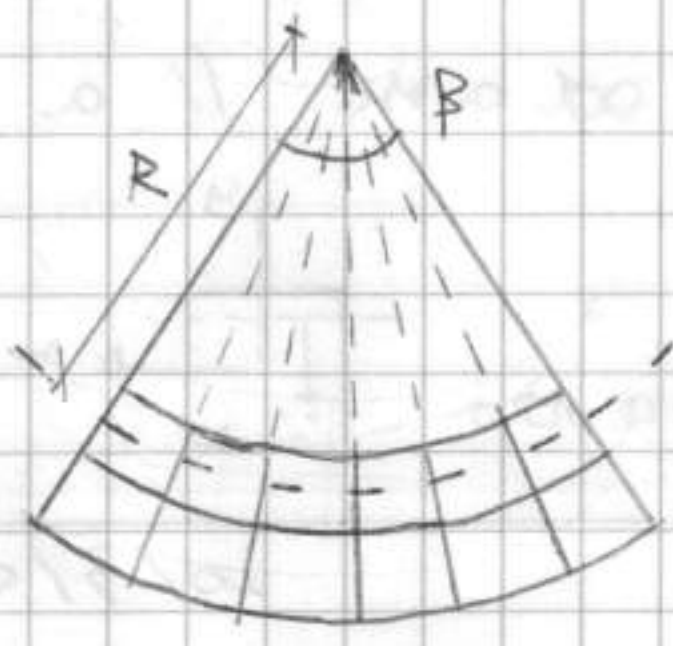


avvicinandoci al piano medio dove i perimetri distribuiti (solo in rottura) \Rightarrow non e' POSSIBILE.

88) Idem: \rightarrow simmetrica, congruente, ma sol. non e' IDENTICA.

DDDDD] \rightarrow qui \nexists simmetria \Rightarrow ser. devono rimanere PIANE!

Possono ruotare int. a piani coordinati? Rimp. all'asse x no, all'asse y no (simmetria) Ser. sono \perp all'asse curv. in

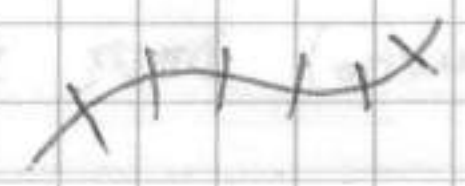


Contr. simmetria rispetto a materia. \times derivare

solidi + complessi Contr. asse e ser. \perp

Sicuramente \exists arco concentrico

ad asse curvato, con $L = L'_{int.}$

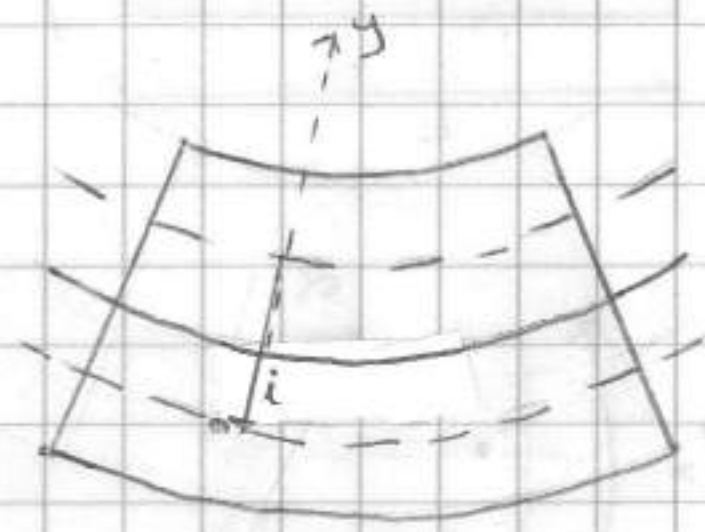


dell'asse che non ha deform. lungo lo sviluppo \Rightarrow

trova' asse pivot di E_z , chiamato ASSE NEUTRO (e' nella trave, non e' sogg. a deformazione). Contr. $R \equiv R_{asse neutro}$

e coordinata i . Uno altro sist. ref. premo

z lungo asse neutro e come \perp la dist. da i .



[stessa z , x ma non più y , prendo la distanza

da asse neutro]. y parte dal baricentro, la i va verso il basso e parte da ax. neutro.

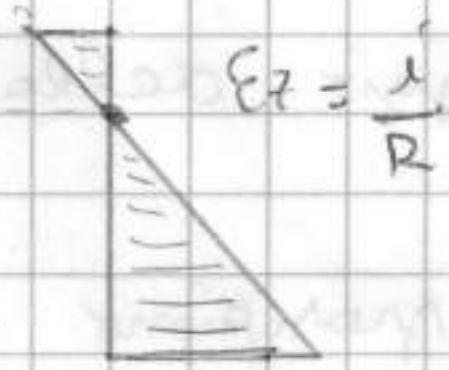
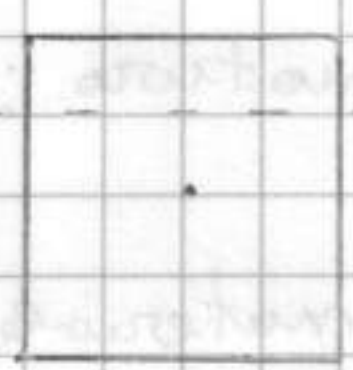
Asse neutro e' lungo $L = \beta \cdot R$. Preva fibra a d. qualsiasi ha

$L' = \beta(R + i)$ Quindi $\Delta L = \beta i$ Posso trovare E lungo

fibra qualsiasi (e' identica \forall sviluppo): $\underline{E_z = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\beta i}{\beta R} = \frac{i}{R}}$

Se mi sposto dall'asse neut. la E e' d

dalla distanza VERTICALE (varia con l'altezza) [e' \square qualsiasi angolo tra le sezioni]



• $E_z = \frac{i}{R} \Rightarrow \sigma_z = E_z \cdot E = \frac{E i}{R}$. Dato conoscere i e R ; R e' caract.

del fenomeno [R alta \Rightarrow curvatura bassa: $\chi = \frac{1}{R}$]

• Equilibrio di concis braccia dz.

Unica eq. a traslazione e' Rimp. a z .

Risultanti tensione sono di compressione e flessione,

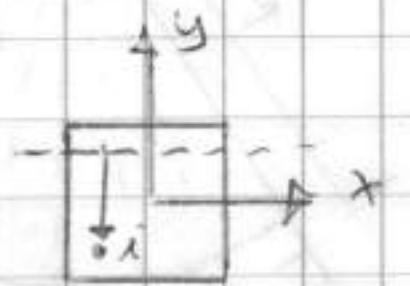


forze si autogequilibrano. Contr. area $\frac{1}{2}$ su sezione:

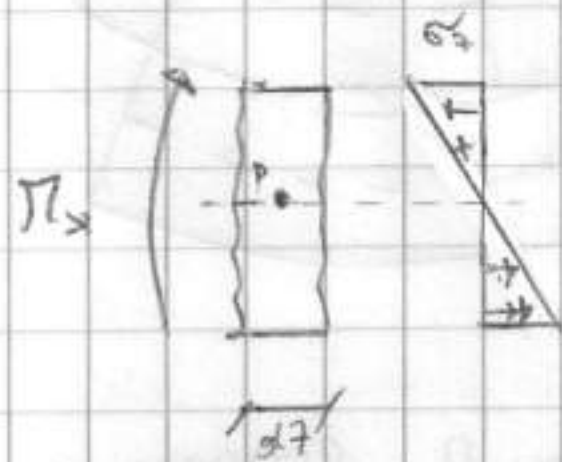
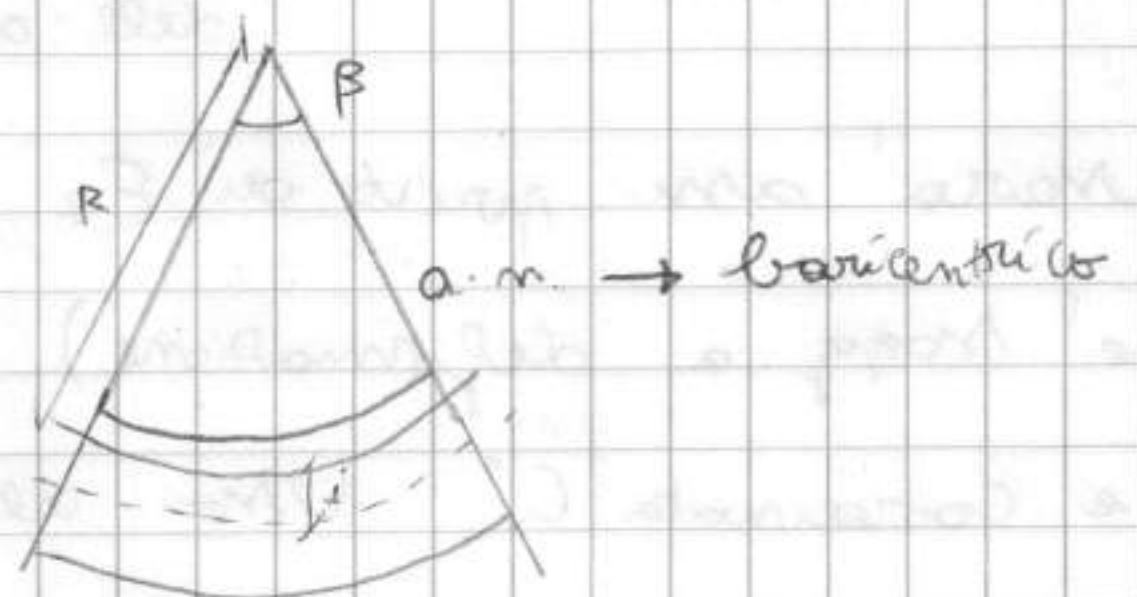
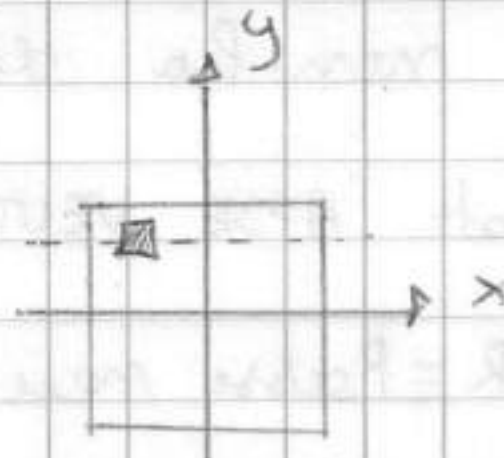
$$\int_A \sigma_z dx dy = 0 \quad [\text{ci mancano solo loro}] \rightarrow \int_A \frac{E i}{R} dA = 0, \quad E \neq 0$$

la contr. del materiale, R è costante $\Rightarrow \frac{E}{R} \int_A i dA = 0$; $\frac{E}{R} \neq 0$ [$R = \infty$ sarebbe trave dritta]

Movimento STATICO attorno ad asse // a x e \perp al piano della sezione (S intorno ad asse neutro) DEVE ESSERE NULLO \Rightarrow asse deve essere nel BARICENTRO.



20/3/06



$$E z = \frac{i}{R}$$

$$\sigma_z = \frac{E i}{R}$$

y = dist. da baricentro
 i = " " asse neutro

Grandezza sezione. Uniamo eq. rot. intorno all'asse x . Polo P :

$$-M_x + \int y \sigma_z dx dy = 0; \text{ a } \sigma_z \text{ not. la sua espressione}$$

[qui $y = -i$]

$$M_x = \int_A y \frac{E(-y)}{R} dx dy, \quad \text{quindi}$$

$$M_x = -\frac{E}{R} \int_A y^2 dA \quad \left[\text{compare la caract. geometrica} \rightarrow \text{mom. inerzia intorno all'asse } x \right]$$

$$M_x = -\frac{E}{R} I_x \quad \text{Non conosco il Raggio della curvatura:}$$

$$\frac{1}{R} = \chi = -\frac{M_x}{E I_x} \rightarrow \text{qui conta solo posizione il materiale}$$

[prima c'era solo l'area, la quantità]

l'istanza conta ma nella def della tensione, ma nel calc. del momento.

$$\text{Quindi } \sigma_z = -\frac{E}{R} y = + E y \frac{M_x}{E I_x} = \frac{M_x}{I_x} y \quad \rightarrow \text{FORMULA DI NAVIER}$$

(30) A punto di sim. e forma ho stesso σ \forall materiale (altri com

l'equilibrio). Nella notazione invece è importante.

$$\sigma_z = \frac{M_x}{E I_x} y ; \quad \epsilon_z = \frac{M_x y}{E I_x} ; \quad \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \epsilon_z$$

- eq. di equilibrio (no ϵ e no γ). Sottintende γ e f. volume.

C'è solo σ_z che è $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$. Qui è f. di $y \rightarrow$ cambia con la y non con la z .

- estensione a sec. di forma qualsiasi. Sol. Vale purché come dir. di riferimento considero gli assi principali d'inerzia.



\rightarrow nel T cambia sia sopra a sotto. Idealmente vogliamo far

lavorare tutto il materiale, quindi σ_{max} lontano da neutral axis.

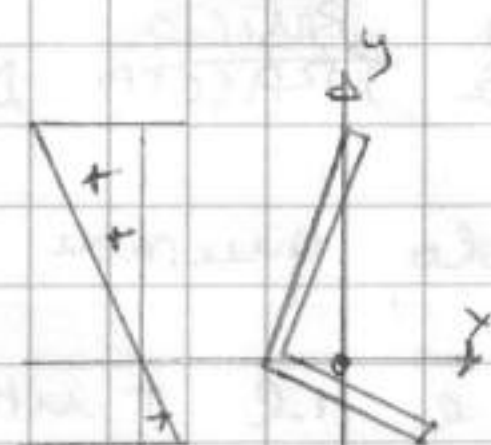
Sezione asimmetrica non lavora bene a flessione (lung. - finché siamo in campo elastico - non è possibile far lavorare al max). Doppio T

è fatta x allontanare materiale da baricentro, e quindi x

sfruttare di + [+ altri motivi]. Anche rotaria è doppio T:

x non sprecare materiale vicino ad asse neutro.

Es: Se M è intorno ad uno dei due assi. Peggio di prima \rightarrow lavora bene poca parte. \Rightarrow forma



principali travi acciaio x portare flessioni è doppio T (altre forme x altri usi).

Stesso Ragionamento per M_y :

Ho messo male il materiale



In realtà \exists

Ma M_x che M_y

(ex: spinta laterale \exists sempre)

Si producono 2 serie di doppio T:

• IPE [PE = profilo europeo; I = lettera x indicare doppio T in inglese,

i maiuscolo = I]. Proietta in dim. dove la base

è \approx la metà dell'altezza. Proietta x

portare M flettente. Alte e snelle x avere



I principale + grande dell' altro (\Rightarrow minori tensioni)

• HE (A, B, o C) [E = europeo; H = in inglese]

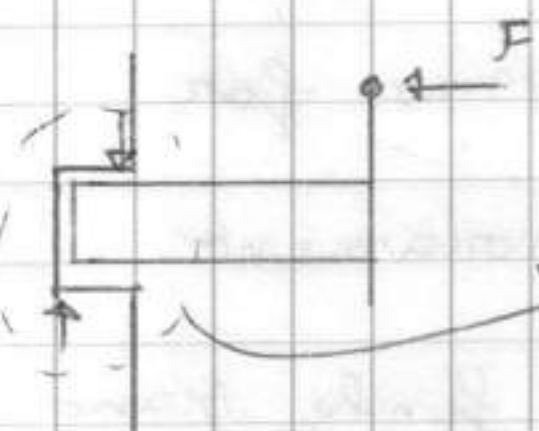
$b \approx h$



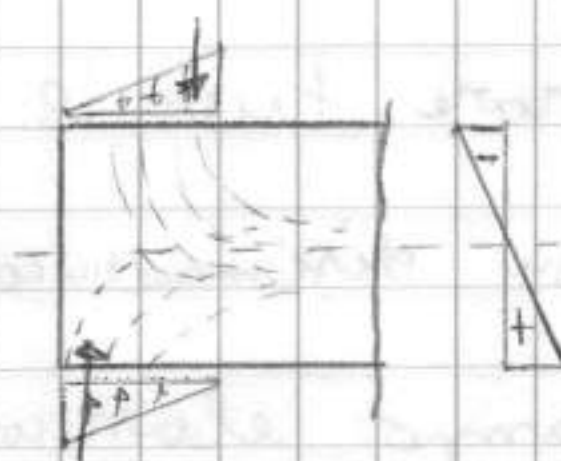
Utile o per flessioni significative intorno ai due assi [M_y comp. con M_x] o T pulsanti.



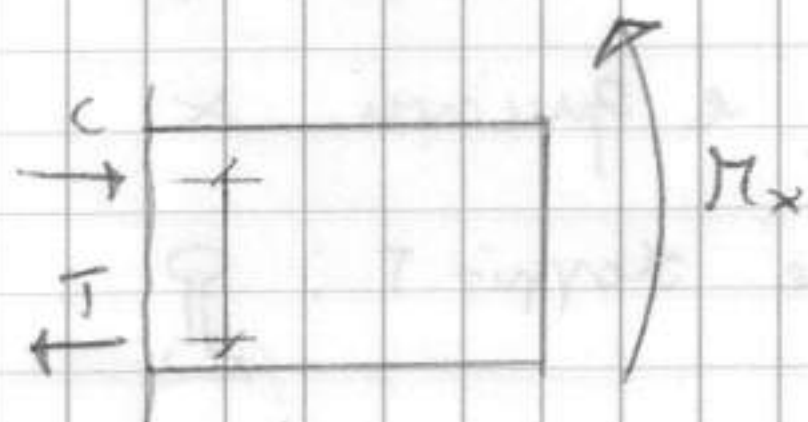
(ex. f. in parapetto). Se trave e' lunga risp. alle dimensioni, f. nell'incastro devono essere grandi.



zona estremita' di S.V. \rightarrow vuole come risult. tanti agenti delle

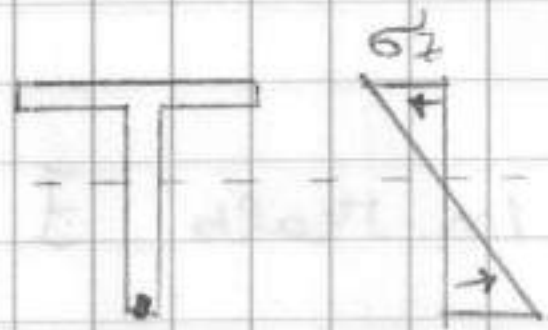


N di compressione e trazione.



Risultante (e' risp. distrib. triangolare, su coppia T e + in alto. (a dall'asse neutro e - della meta' di h). La distanza

e' il BRACCIO DELLE FORTE INTERNE, sta eq. alla sezione. E' piccolo, quindi C e T sono grandi, flessione e' leva SFAVOREVOLE ma e' il + utilizzatore. E' comodo (a vuole + materiale, e' coltato), e' funzionale



Punti + impegnati sono su intradosso e estradosso

Evitare smentimenti, 1' cosa e' controllare la

o MAGGIORE MODULO DI RESIST. A FLESSIONE

$y_{max} = y_E$ (ESTRADOSSO)
 $y_{min} = y_I$ (INTRADOSSO)

[cm.]

$\sigma_{ze} = \frac{M_x \cdot y_e}{I_x}$ considero

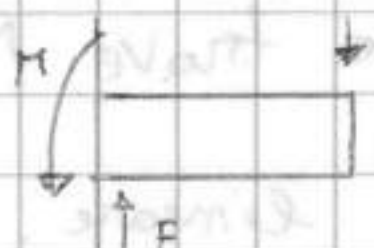
$W_x = \frac{I_x}{y_e}$

$\sigma_{ze} = \frac{M_x}{W_x}$ [4 grand. fondamentali, gia' tabellate]

Si sa molto lo σ_{max} e σ_{min} su trave. Dobbiamo sapere il limite di lavoro della trave.

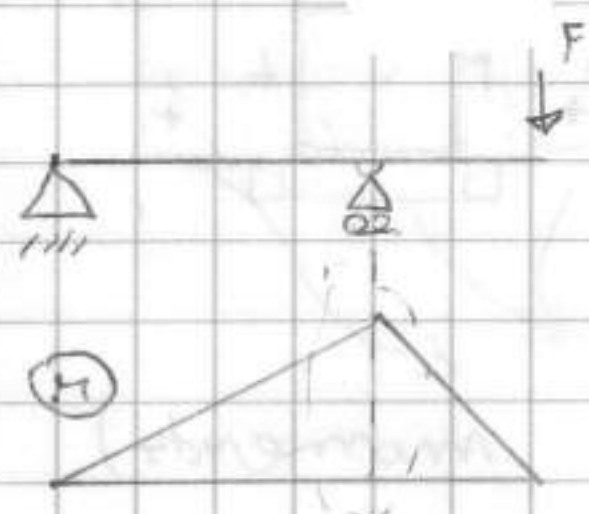


Torques costante e $M = F \cdot L$



+ e' al di FUORI della sol. trovata

(M varia). Si fa approx x affermare che - finché M e' descritto da f continue - la sol x $M = \text{cost}$ si può applicare in forma approx.



Dove c'è discontinuità abbiamo l'estremo di

S.V. Estensione a S.V., e' indicata come

TEORIA DI TIMOSHENKO (= TEORIA TECNICA DELLA TRAVE)

Schema di equilibrio delle tensioni agenti:

Soluzione non comprende solo σ_z

Es: trave doppia T del tipo IPE 100,

che ha:

$h \approx 10 \text{ mm}$

$$I_x = 171 \text{ cm}^4, \quad I_y = 16 \text{ cm}^4, \quad A = 10,3 \text{ cm}^2 \quad [I_x / I_y \approx 10]$$

Es: $L = 2 \text{ mt}$ e $F = 1 \text{ t}$. $h = 10 \text{ cm}$ e $b = 5,5 \text{ cm}$

σ_y sono in larghezza ala x spessore (ad ex. parapetto,

$\approx 10 \text{ cm}$). $F = 1000 \text{ kg}$. $A_c = 5,5 \cdot 10 = 55 \text{ cm}^2 \Rightarrow$

$$\frac{F}{A} = \frac{1000 \text{ kg}}{55 \text{ cm}^2} \approx 20 \text{ kg/cm}^2$$

Al l'altro estremo (incastro): $\sigma_z = \frac{(M_x)_{\text{max}}}{I_x} = \frac{1000 \times 200 \times 5}{171} \approx 5850 \text{ kg/cm}^2$

Passano almeno 2 ordini di grandezza

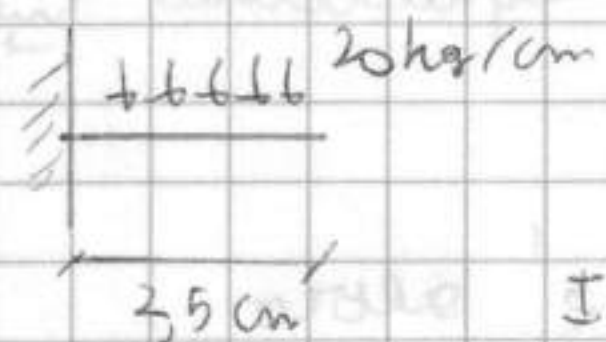
tra effetti locali e tensione indotta da flessione [SFABORILE]

Trave di 200 cm, effetti di warping e' + di 100 volte. Si ha sempre questi effetti \Rightarrow effetti di contrasto (ex σ_y) sono piccoli risp.

al fless (o σ_z). Sono effetti locali + A loro volta ali

sono piccole membrane. Prendiamo striscia ala di 1 cm,

lunga $\approx 3,5 \text{ cm}$ [$b/2$ - anima]. M agente e' $20 \cdot 3,5 \cdot 1,25 =$



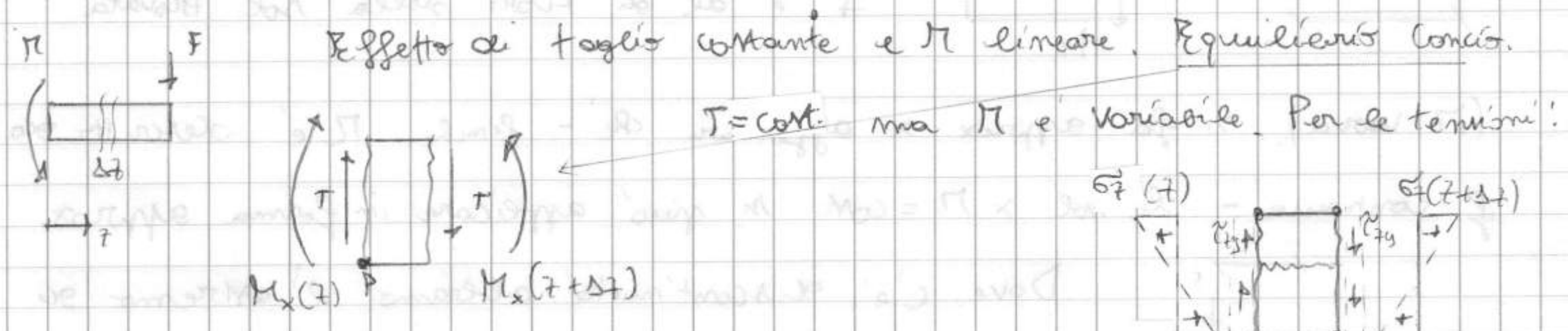
$$I_x = 62,5 \text{ kg cm}; \quad I_x^* = 0,015 \text{ cm}^4$$

$$I = \frac{(0,5)^3}{12} + \frac{(0,5)^3}{12}$$

La tensione di flessione sull'ala e' $\sigma_z = 1187 \text{ kg/cm}^2$

SIGNIFICATIVI! (effetti locali qui in

amplifica come effetto di flessione). Se è un problema si mette un fazzoletto di rinforzo X il resto della trave si usa S.V.



[frece ten. siamo verso, altrimenti $t = \text{trazione}$]
 O nell'entr. e imb. t (involte del taglio) \leftarrow (involte del momento)
 considero reciprocità τ [entr. e scarico]

Eq. equilibrio risp. a P: $-T\Delta z - M_x(z) + M_x(z+\Delta z) = 0$
 $\Delta M_x = T\Delta z$ (Stessa approx. dove si parte a equilibrio con ipotesi su distrib. tensioni (dirett. al 3° piano).) [Prass. lavoro]

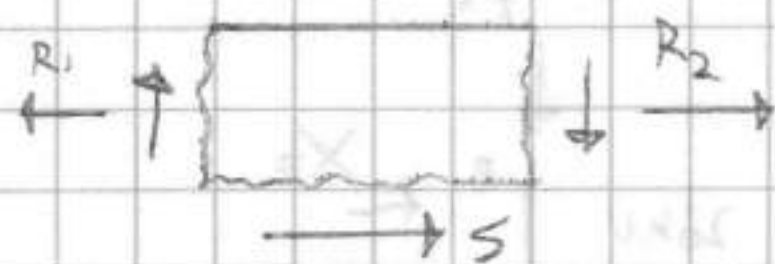
Non sappiamo se τ_{xy} varia con x [con $t = \text{cost}$] \leftarrow
 cambia con y. S, c'è variazione: \leftarrow \leftarrow

inferisce quanto t è stretta la sezione \Rightarrow IP: Var. lungo la x è modesta e si assume come caratteristica del fenomeno la media (τ_m)
 (ipotesi derivata da analisi sperimentale di JOURAWSKI \rightarrow TEORIA DEL TAGLIO DI JOURAWSKI) \rightarrow 3 ordini (piccoli) di approx: 1) presenza $\sigma' \neq \sigma_z$; 2) $\pi \text{ cost} \rightarrow \pi \text{ var}$; 3) τ_m .

Tagliamo con piano // all'asse z , al piano xz ed altera qualcosa. Individuo pezzo di trave: equilibrio tensioni.

Devo esseri ten. in faccia di rotto (le 2 σ non \neq): non τ reciproche X equilibrio
 del tipo τ_{xz} X garantire equilibrio pezzo.

② In termini di risultanti, insieme a flessione e altro importante risultati.



($R_1 > R_2$ perché $M_1 > M_2$) → risultante R
 "aiuta" R_2 + piccola $[S]$: S è
 iniziale di SCORRIENTO, non forte di scorr.

Ex. tavolette legno app e caricate ⇒ SCIVOLANO,

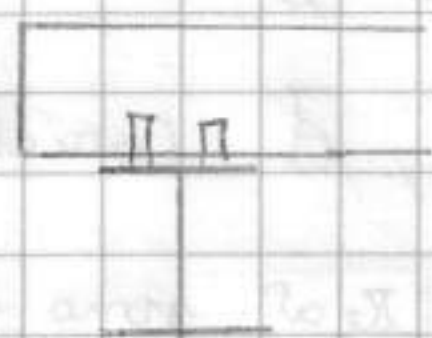
sez. non si comportano piano, se le

inchiostro ha che tutto si inflette e

[I è su h e non su h fettine]

Ci servono elementi strutturali x assorbire movimenti

ex. unioni BULLONATE (o SALDATE) in strutture miste



uno i pezzi d'acciaio

(acc. e c.a.)

(stesso x Chiusatura forte legno)



Quando c'è taglio ci sono le FORZE DI SCORRIENTO

Eq. in dir. z : $-R_1 + R_2 + S = 0$ (se $M = \text{cost}$, $S = 0$) [A^* = area ridotta]

$$-\int_{A^*} \sigma_z(z) dA + \int_{A^*} \sigma_z(z+\Delta z) dA + \tau_{yz} \cdot \Delta z \cdot b(y) = 0 \quad \text{Quindi:}$$

$$-\int_{A^*} \frac{M_x(z)y}{I_x} dA + \int_{A^*} \frac{M_x(z+\Delta z)y}{I_x} dA + \tau_{yz} \Delta z b(y) = 0 \Rightarrow \left(\Delta M_x = M(z+\Delta z) - M(z) \right)$$

$$\int_{A^*} \frac{\Delta M_x}{I_x} y dA + \tau_{yz} \Delta z \cdot b(y) = 0 \Rightarrow \int_{A^*} \frac{T \Delta z y}{I_x} dA + \tau_{yz} \Delta z \cdot b(y) = 0$$

$$\frac{T \Delta z}{I_x} = \int_{A^*} y dA + \tau_{yz} \Delta z b(y) = 0$$

Rimane il momento statico
 del pezzo su area rispetto al

baricentro, quindi

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\frac{T S^*}{I_x b(y)}$$

→ Variano $S^*(y)$ e $b(y)$

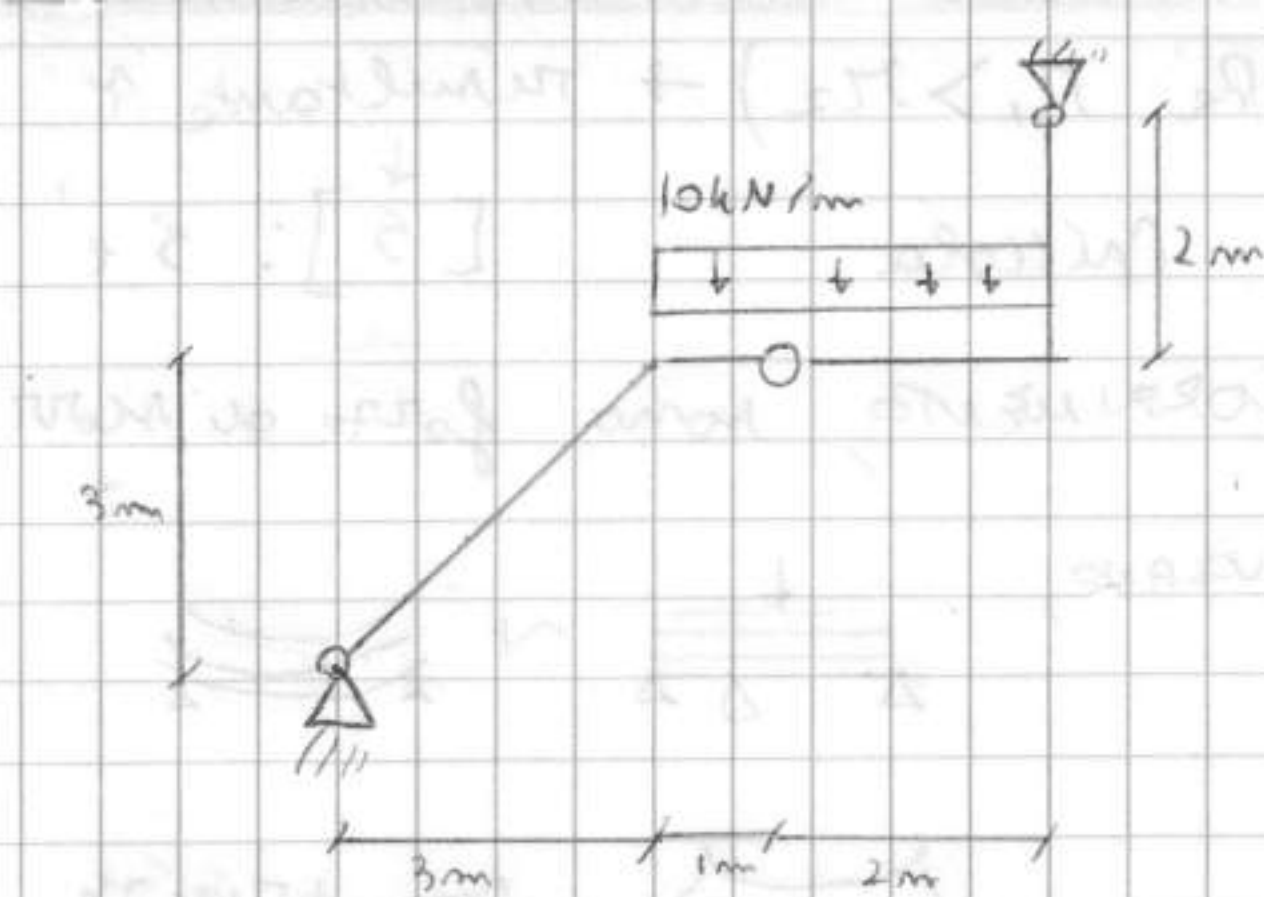
variabilità lungo la y ,

analogo ad altri casi ma + complesso. Conta come mette il materiale

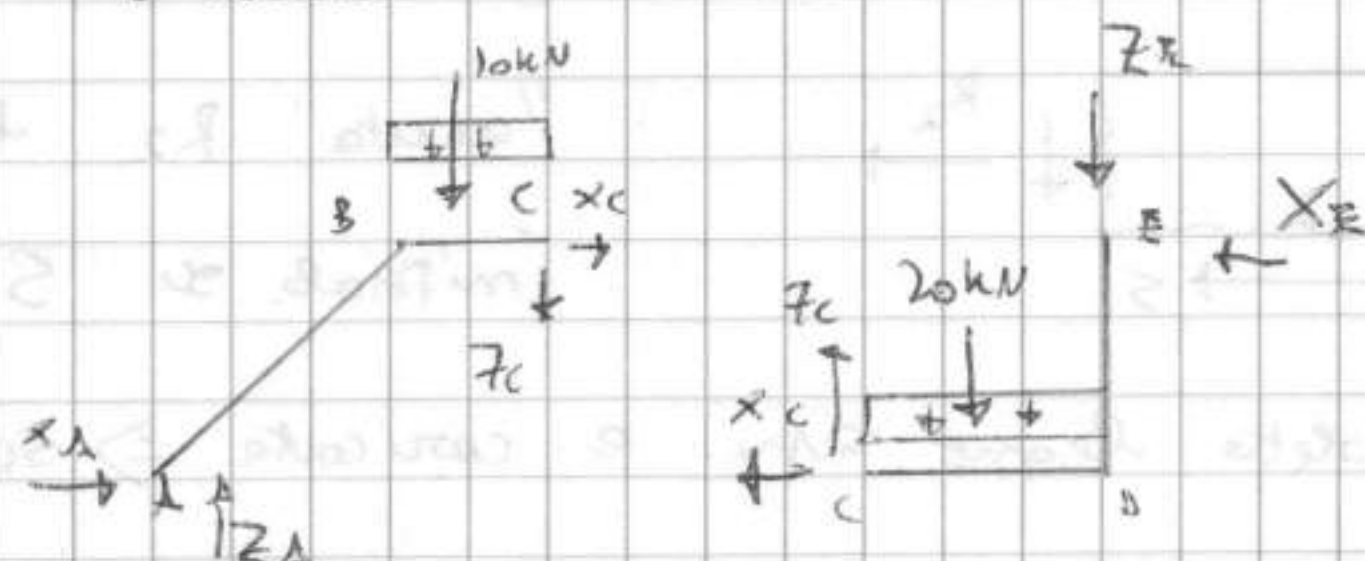
ma di meno (T e 1 solo valore risp. a M) → eq. equilibrio non

considera le distanze, è lineare e non quadratico.

23/3/06



Schema Matrico!

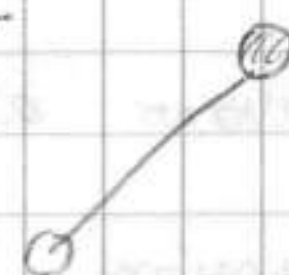


(ovvero è fare prima risultante carico e poi spezzare i corpi). Qui non

c'è parte "pendolare" (solo N)

(pendolare) +

Se prende F solo ad estremità ha solo N



Su AB T = costante e M = lineare e parte da A con valore 0

In C i corpi in tramm. Reatt. interne uguali e contrarie; Carichi

concentrati applicati \Rightarrow eq. nodo:

quindi reatt. sono ug.



Su ED x continuità c'è N e

T (costante) e M(E) = 0, lo stesso in C.

Eq. equilibrio:

(conviene fare eq. mom. con polo in A ed in E)

$$\begin{cases} X_A = -X_C \\ Z_A - 10 - Z_C = 0 \\ 35 + 4Z_C + 3X_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_C = -X_E \\ Z_C - 20 - Z_E = 0 \\ 2X_C + 2Z_C - 20 = 0 \end{cases}$$

+ d'ora stesse var \rightarrow corre. lineare. Molt. la 2^a x 2 e la sottopongo alla prima

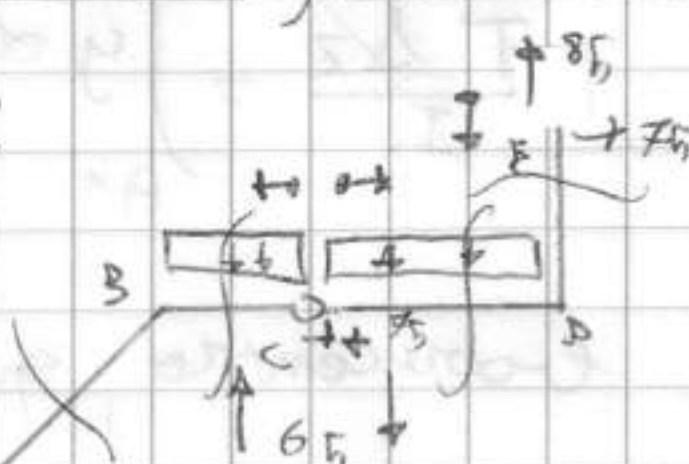
$$35 - (-40) - X_C = 0 \Rightarrow X_C = 75 \text{ kN}$$

sostituisco e trovo le altre.

$$150 + 2Z_C - 20 = 0 \rightarrow Z_C = -65 \text{ kN}, Z_E = -85 \text{ kN}, Z_A = 55 \text{ kN}, X_A = -75 \text{ kN}$$

$$X_E = -75 \text{ kN}$$

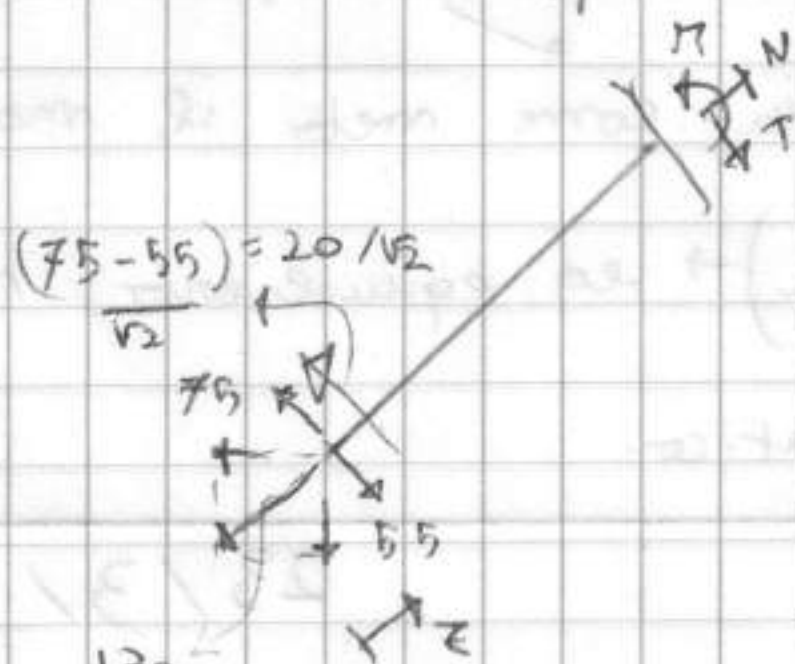
Schema di corpo libero equilibrato:



Diagrammi di sollecitazione (4 art.)

(\rightarrow = Verso di percorrenza)

- AB:



$$N_{AB} = \frac{130}{\sqrt{2}}$$

$$T_{AB} = \frac{20}{\sqrt{2}}$$

$$M_{AB} = \frac{20 \cdot z}{\sqrt{2}}$$

(molto è parte terra)

- BC:

$$N_{BC} = 75 ; T_{BC} = 10z - 65$$

$$M_{BC} = -5z^2 + 65z \quad (\text{conta da pila 657 da})$$

mi quanto poco, inizialmente parte terra e' inferiore)

- CD:

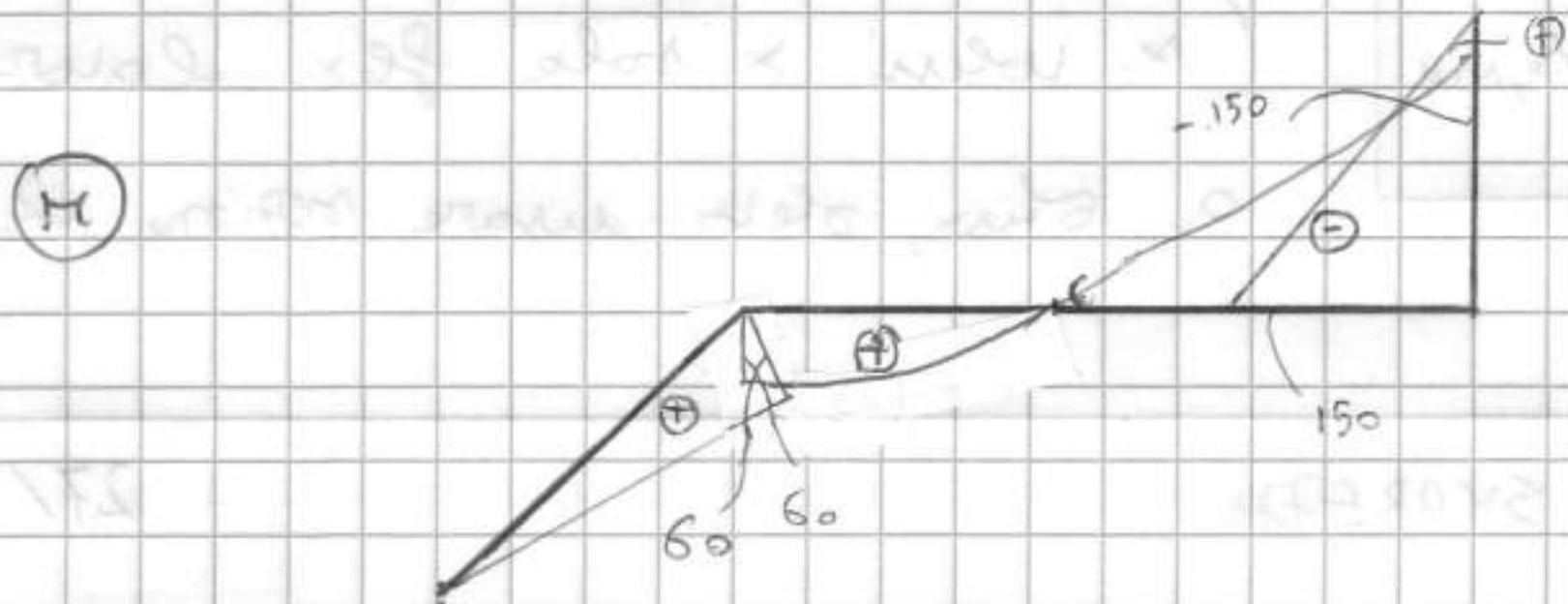
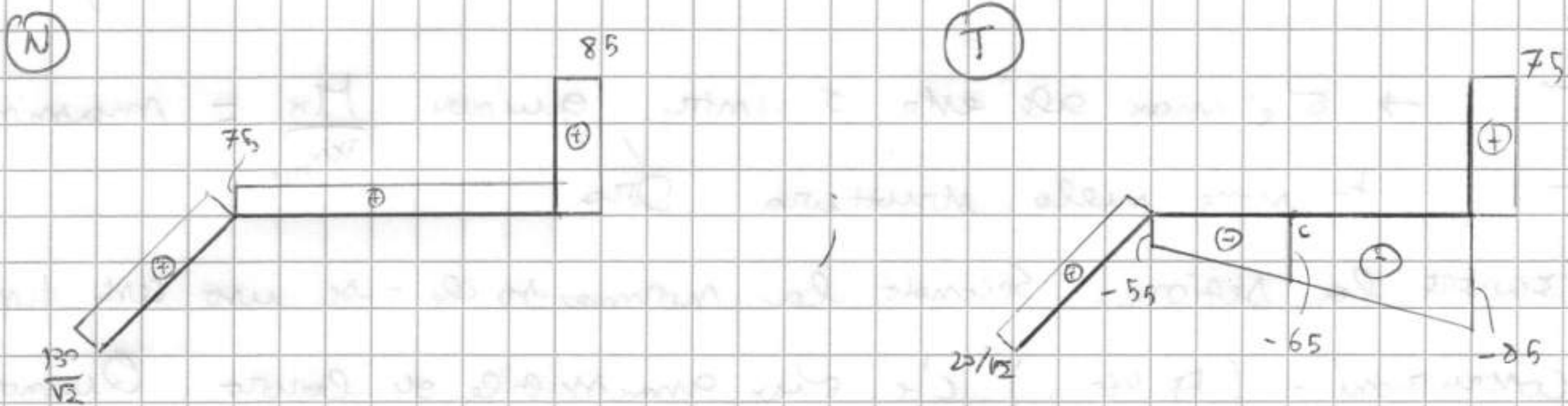
$$N_{CD} = 75 ; T_{CD} = -65 - 10z$$

$$M_{CD} = -65z - 5z^2 \rightarrow \text{terra parte superiore}$$

- DE:

$$N_{ED} = 85 ; T_{ED} = 75$$

$$M_{ED} = 75z \quad (\text{scelta del sist. ref. locale non cambia equilibrio sistema})$$



(qui e' ok \oplus e \ominus , perche' ho \downarrow , conta le VERSO non le segno)
(continua...)

PREDIMENSIONAMENTO SEZIONI (scelta iniziale sezione)

Uniamo IPE e HE ; HE = usati se flessione arriva da + di una direzione (montanti, pilastri)

IPE = x elem. orizzontali.

IPE 80 $\Rightarrow h = 80 \text{ mm}$; $H \in \begin{cases} A & \rightarrow \text{legge applicata nelle proporzioni e} \\ B & \rightarrow \text{memori proporzioni} \\ n & \text{(x o a m)} \end{cases}$

Grand. geometrica che vogliamo è il MODULO di RESISTENZA A FLESSIONE.

$$W_x = \frac{I_x}{y} \rightarrow \text{Rapporto tra uno dei mom. d'inerzia e una certa altezza. Quanto distano punti dal baric. [y]}$$

A parità di area, IPE ha $W \gg HE$ (al + distanti)

Emendo per simmetrie vogliamo W_{max} e W_{min} (valori tabellati)

$$W_{x_{min}} = \frac{I_x}{h/2}$$

max. d. dal baricentro

Le σ_z si calcolano con formule di Navier, ovvero $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$, punti

critici x flessione semplice sono estremità

sezioni



Si può anche scrivere così:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{(I_x/y)} =$$

$$= \frac{M_x}{W_x}$$

$\rightarrow \sigma$ è max alle estremità, quindi $\frac{M_x}{W_{x_{min}}} = \text{massima tensione nella struttura. Ora}$

devo scegliere la sezione. Secondo la norma che - se uno certo tipo acciaio + costruzioni - (FE 460...) c'è σ_{adm} ammissibile di lavoro. Quindi

$$\frac{M_x}{W_{x_{min}}} = \sigma_{adm} \Rightarrow$$

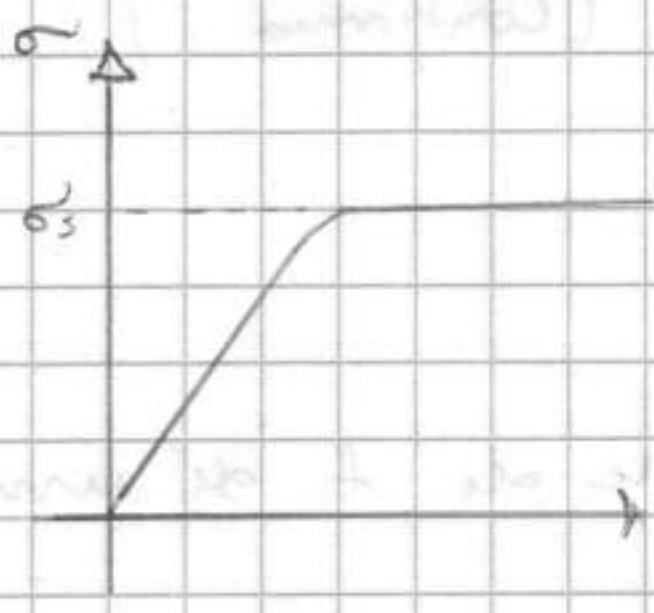
$$\frac{M_x}{\sigma_{adm}} = W_{x_{min}}$$

(x volenti x sola flex lavorare a σ_{adm} , devo avere sezione che

al minimo ha $W_{x_{min}}$).

VERIFICHE DI RESISTENZA - LIVELLI DI SICUREZZA

27/3/06



Decisione un livello di sicurezza \Rightarrow impiego

$\sigma < \sigma_{adm}$ materiale e quindi i costi. Importante è

il confronto tra materiali diversi x scelta

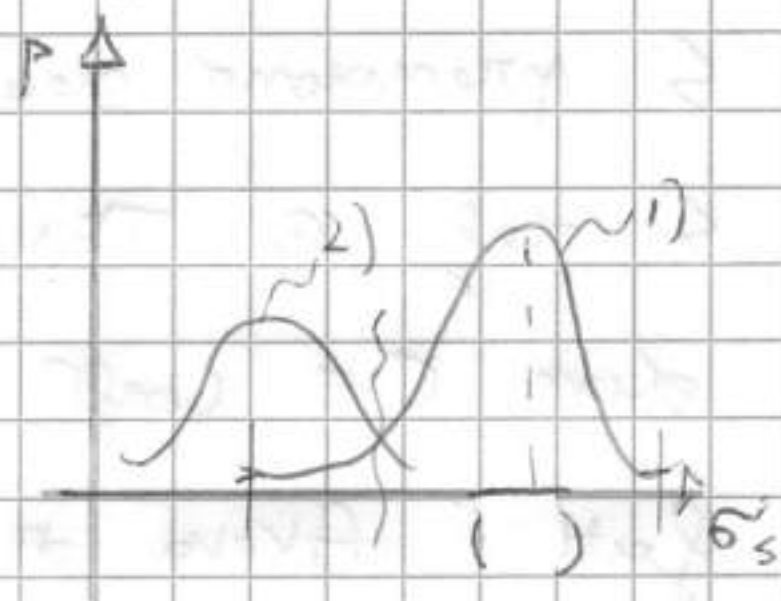
sono 3 gruppi di fattori:

1) RESISTENZE MATERIALI

2) ATTONI

3) VARIE (altri effetti)

1 - Dispersione sperimentale caratt. materiali stessi. $\{ \Leftrightarrow \text{affidabilità dei materiali (acciaio è controllabile sia costruttiva sia ex, controllo meno "industriale"} \Rightarrow < \text{affidabilità complessiva} \}$ fascia di dispersione delle resistenze, aumentando spesso \times prob. Resistenza.



2 - Analogia x azioni: selezione di carattere meccanico (carichi di progetto) e di tipo "ambientale". Carico (mg) ha superimposizione (carichi variabili) con estremi potenti. Ex. azioni e resistenza. $\{ \text{ad ex. cond. di carico dove carichi si possono superare} \}$ magnitudini x effetti distruttivi (ex. persone che saltano - vale sia ballo e Mosai). Grafico le tensioni in struttura a causa di un certo carico. Collano c'è il l'effetto delle azioni (2) supera quello delle resistenze. Non basta a non gli.

3 - ALTRI EFFETTI (ciò che è dovuto ad approx ed errori nel processo di realizzazione dal progetto alla prova in opera). [meno nell'incertezza si \rightarrow a favore sicurezza] Ex: posizioni e caratteristiche vincoli. Poi ci sono le approx in fase costruttiva (ex. laminatione doppio T si usurano e allontanano rulli); approx geometriche. Poi per acciaio ci sono le tolleranze (ex. spessore di $20 \text{ mm} \pm 1 \text{ mm}$) e le certificazioni di qualità. C'è poi l'ERRORE UMANO, da quello di calcolo, di "comunicazione" (disegno sbagliato), in fase di costruzione \rightarrow difficile da quantificare.

Storicamente si variavano i liv. di sicurezza empiricamente, in fun.

di ciò che si riscontrava \Rightarrow corrispondenza tra LS e PERIODI DI

RITORNO poco al di sopra di vita lavorativa persona (ex. 50 anni) (99)

PERIODO DI RITORNO: intervallo di tempo che caratterizza e presenta di una qualsiasi azione.

Si aumentano ^{fino a} σ_s quando non si "vedeva più" il problema, ovvero fino alla VITA UTILE [oltre la quale non correggo più]

Si prendono decisioni su base empirica (oggi un po' confermate).

Si def. le TENSIONI AMMISSIBILI σ_a x un materiale:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_s}{C} \quad \text{limite}$$

dove C = coeff. di SICUREZZA che considera quei fattori. Aveva origine EMPIRICA, poi si sono cercati perfezionamenti analitici. Ex: doppio T: $C \approx 1,5 \rightarrow$ si semplifica il disegno.

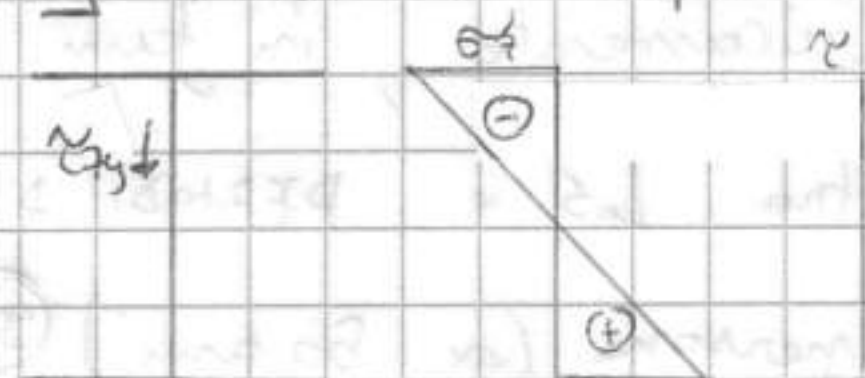
Vogliamo essere in campo ELASTICO; dopo certa base di dati si sono DIFFERENTATI i coefficienti (materiali e azioni, separate le componenti) [è ottimo metodo di 1° approccio]

METODO DEGLI STATI LIMITE ULTIMI

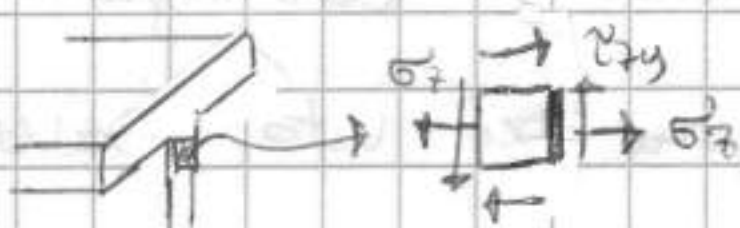
Sicurezza divisa in parte γ_M materiali e parte γ_F FORZE (che comprende anche "VARI" γ_F). $\gamma_M > 1$ una x ridurre σ conv. limite alla quale si ha un danno; $\gamma_F (> 1)$ \rightarrow azioni effettive su progetto (F) vengono sovrastimate: $F \times \gamma_F \Rightarrow \sigma \times \gamma_F$. Si verifica: $\sigma \times \gamma_F \leq \sigma_s / \gamma_M$ [$C \approx \gamma_F \times \gamma_M$], esp. "analoga con t. ammissibili", ma \neq | Si def.

formata γ_F a seconda delle varie azioni \Rightarrow migliore coerenza sicurezza al comportamento. Ex. peso proprio varia poco rispetto ad azioni dinamiche [Oggi si introducono dei fattori di IMPORTANZA (x qualsiasi motivo, ex. Ospedale \leftrightarrow capannone di cemento), fattori di VITA UTILE di riferimento da considerare, fatt. che riguardano il comportamento strutturale].

\exists + se 1 tipo di tensione (flessione e taglio), + se 1 componente.



Ex: doppio T. Elemento soggetto a σ_z e τ_{xy} .



Come confrontarla con σ ammissibile (100)

UNICA \Rightarrow "introdotti algoritmi" x la risoluzione (CRITERI DI RESISTENZA)

"exp. / algoritmo / etc. che trasforma uno stato di tensione polinomiale in uno stato di tensione monomiale EQUIVALENTE" \rightarrow ho una σ IDEALE \equiv

6) ora dal σ si vede l'effetto del materiale. Non si confrontano le 2 componenti (σ e τ ma anche $\alpha +$) che \exists troppe combinazioni.

Algoritmo deve rispondere a certi requisiti:

1) I σ_{Masse} non devono modificare i σ_{Base} . Se $\text{Masse} \Rightarrow \text{Masse}$
(non devo cambiare ciò che va già bene, delle restare invariato)


2) Se ho solo γ [$\mu \approx 0$ e $T = \mu \times$] questa è cambiata / o la riflettere la vera γ_{SUGAR} sperimentale che si osserva sperimentalmente al punto se si fanno prove di γ pura su elemento metallico.

→ Da $\chi_{\text{orig}} \Rightarrow \chi_{\text{SPERM. N. SUPERV.}}$ (x) auf die Kombination e $\chi_s = 0.586_s$

Modelli sviluppati in campo elastico escludono effetti plastici. Contr. elementi strutturali in campo "ristretto" (\square normative specializzate x vari materiali) Per acciai ad alta ten. $n \neq 1$ e coeff. di sicurezza.

(- significant)

3) Escludere nelle exp. le COSTANTI ELASTICHE (tracce sui comportamenti in ambito urbano) E, ν, G [is. con il DDUO del materiale] \rightarrow morcammento, etc...

4) Rappresentare anche stati di tensione particolari: ex. σ su tutte le facce \rightarrow  \rightarrow [stato di tensione IDROSTATICO] \rightarrow materiale non si rompe mai [si comprime uniformemente, può solo allungarsi]. Si deve considerare anche questo comportamento, ma è difficile.

Storicamente x Conoscere Stato del terr. si e pensato a Circolo Molo

Interio su NAVIER o della TENSIONE PRINCIPALE MASSIMA

Si assume $\sigma_D = |\sigma_{\max}| \rightarrow \sigma_{id} = \max\{\sigma_I, \sigma_{II}\}$

[non si considera la diff. tra trazione e compress.] (101)

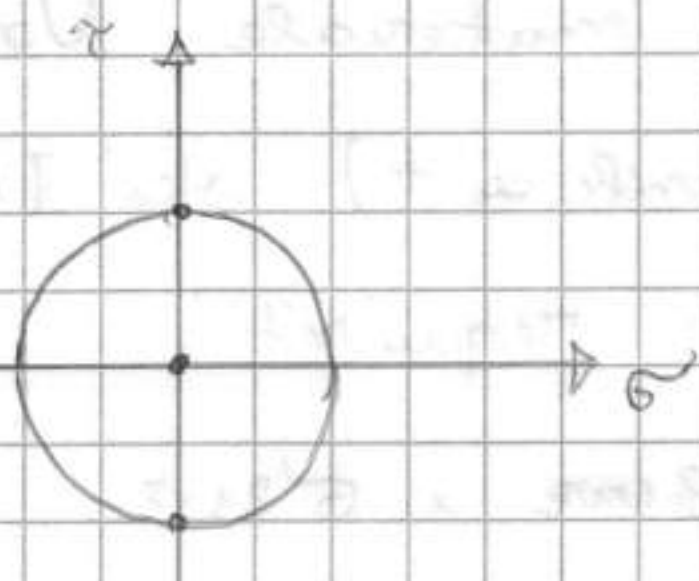
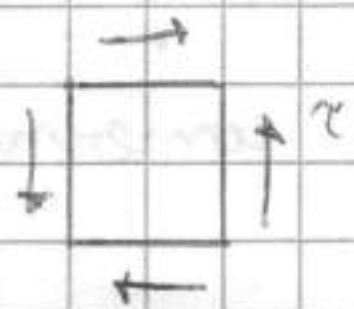
Verifico Outero



$$\sigma_{max} = \sigma \text{ considerata}$$

di Morioni σ non Δx (1)

(2)



→ le t. principali \equiv gir.

orientate a 45° $\sigma_{1,2} = \tau$

PISSIMO RISULTATO (avrei avere 9,58, non 1) Poi sollecitazione

DEUTEREA REALE (materiale si rompe prima) $\rightarrow C \cdot 0,6 + 1,5 \cdot 0,6 \approx 2,9$

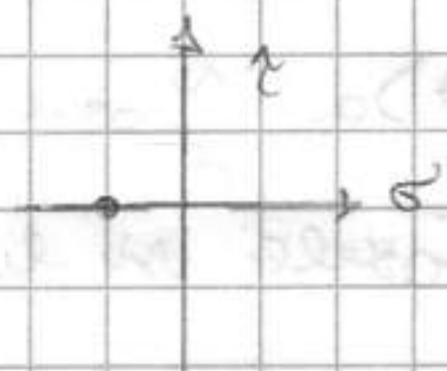
MONTURA COLLASSIBILE (Criterio di Navier x metalli molto abbondanti)

Secondo e Verifico 3) [SI] e 4) [N] \rightarrow con la

mt. idrostatica \rightarrow circol. DEGENERATA in un punto

e $\sigma_{min} = \sigma_{max}$ e $\sigma_{1,2} = \sigma$ applicata, simile a

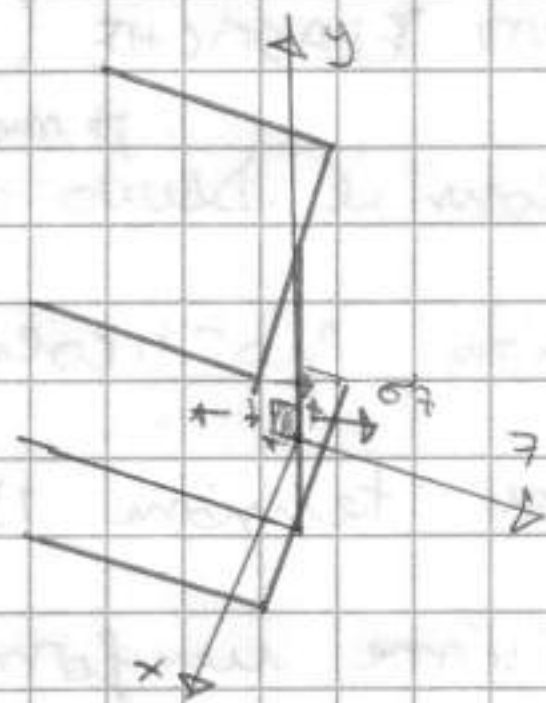
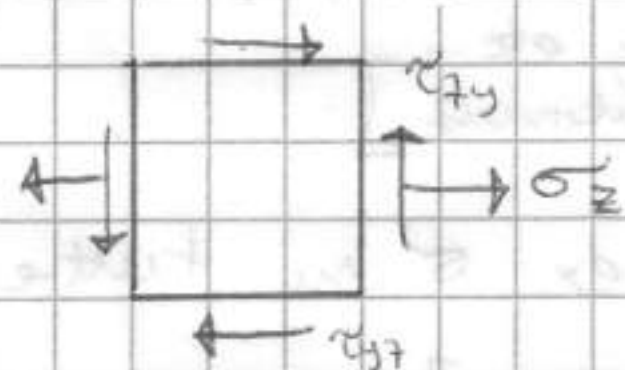
trazione semplice.



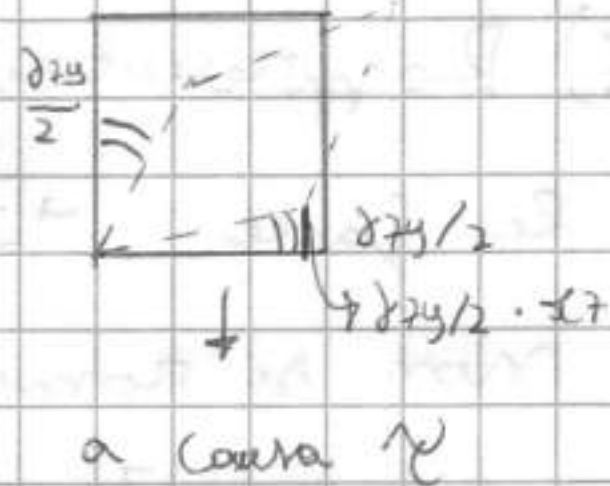
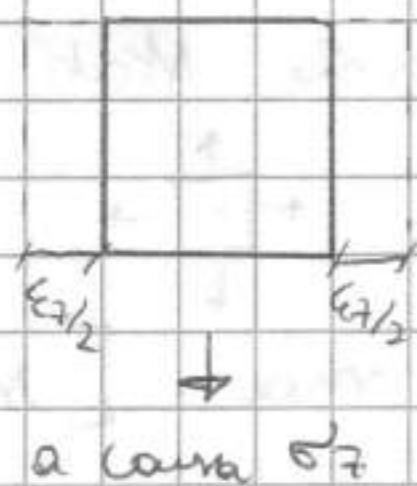
È utile però x materiali non reagenti a trazione (ex. muratura)

(Significativa trazione porta molto danni) \rightarrow analisi deformazione.

Elemento:



(deformazione $\frac{1}{2}$)
Si può deformare così:



✓ Moritura in eq. [principio di BIANCO ENERGETICO: il lavoro

x spostare (ex. deformare) una Moritura (lavoro esterno) è:

$$L_e = \int_V \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_S \dots + \int_L \quad (\text{aggiungo distribuzioni})$$

superficiali e lineari) $+ \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{s}_i$

Rappresentando le Forze rispetto agli spostamenti,

trattiamo teoria lineare (elasticità mat.

lineare) \rightarrow conv. il legame costitutivo prima
dello smembramento. Essendo ϵ integrale,

$$\boxed{L_e = \frac{1}{2} F \cdot s} \rightarrow \text{TEOREMA DI CLAPEYRON}$$



Se compie lavoro esterno, struttura lo assorbe DEFORMANDOSI, assorbe

En. pot. elastica rappresentabile tramite il LAVORO INTERNO (\equiv E.P.E. strutt.)

$$L_i = \int_V \underbrace{\sigma \cdot \epsilon}_{\text{tensione}} dV \rightarrow \text{DENSITA' DI LAVORO} \equiv \text{DENSITA' DI EN. POT. ELASTICA STRUTTURALE}$$

Non ci deve essere dissipazione di energia, quindi

$$\boxed{L_e = L_i}$$

(può valere in generale, a noi interessa strutt. deformata)

Quando ϵ e γ indipendentemente, lungo z il lavoro è solo stato da

$$dL = \underbrace{\sigma_z}_{\text{lung. area } \frac{1}{2}} dx dy \cdot \underbrace{\epsilon_z}_{\text{lung. area } \frac{1}{2}} dz \text{ mentre per } \gamma: \text{Conv. faccia verticale}$$

$$\perp a \, dx dy \text{ "F" } [dx dy dz = dV] \quad \text{che ruota di } \gamma/2$$



lungo $dy \rightarrow$ è γ_{zy} che compie il lavoro sull'area,

quindi abbiamo due contributi, uno è $\frac{\gamma_{zy}}{2} dy \cdot \gamma_{yz} \cdot dx dz$, l'altro è

$\frac{\gamma_{zy}}{2} dz \cdot \gamma_{zy} dx dy$. La loro somma è il contributo al lavoro

$$\text{delle } \tau: dL = \tau_{zy} \gamma_{zy} dV$$

Se considero il legame LINEARE tra σ ed ϵ , posso

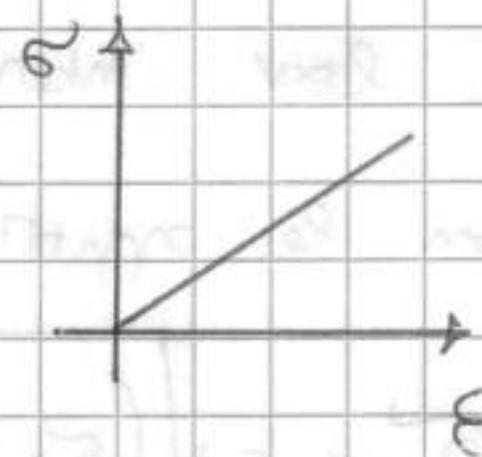
dire che

$$\boxed{L_i = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \epsilon dV}$$

(ho 6 componenti, $\rightarrow 3\sigma = 3\tau$)

Ragionamento - fatto in zy - n

può fare anche in altri piani



Utile x i criteri di resistenza. $\sigma_{ia} \rightarrow \epsilon_{ia}$. BELTRAMI ha

pensato che - x scegliere dei criteri di resistenza - si dovesse eguagliare

il lavoro interno a quello ideale \rightarrow quello idealmente compiuto

dallo stato sintetico di tensioni monoassiali σ_{ia} .

Ovvero:

$$L_i = L_{ia} \Rightarrow \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \epsilon dV = \frac{1}{2} \int_V \underbrace{\sigma_{ia} \cdot \epsilon_{ia}}_{\text{prodotto algebrico}} dV =$$

$$= \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \dots) dV, \text{ integrando su tutto il volume}$$

Volume si può equagliare le f. int. e sfruttare il legame costitutivo

$$\left[\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \right] \text{ Quindi } \frac{\sigma_{id}^2}{E} = \frac{\sigma_x^2}{E} + \dots + \frac{\tau_{xy}^2}{G} \dots, \text{ allora}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) + 2(1+\nu) \tau_{xy}^2}$$

Criterio di Resistenza, Verifica:

- 1) ok ; 2) mettendo tutto 0 tranne τ , $\sigma_{id} = \tau_{xy} \sqrt{2(1+\nu)}$, per acciaio in stato elastico $\nu = 0,3$, quindi $\tau_{xy} = 0,62 \sigma_{id}$; 3) non è buono, α da ν [cost. elastica, ha buona transizione nei metalli] ; 4) essenziale σ^2 non distingue il segno (comp. o trat.).

Criterio migliorato x i metalli con il CRITERIO DI VON-MISES

Dato un qualsiasi stato tensionale, si può rappresentare

Come M.d.t. globale alla TENSIONE MEDIA (Normale) data

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

Cio che rimane \rightarrow è sempre o compressione pura o trat. "pura"

effetto "volumetrico", V-M. definire il LAVORO DI DISTORSIONE come il lav. interno - il lav. compiuto sulla σ_m : $L_d = L_i - L_m$

Con le opportune sostituzioni e trasformazioni si ottiene:

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - 3(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

Per lo stato piano di tensione diventa: [via i termini misti etc] (in xy):

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zy}^2}$$

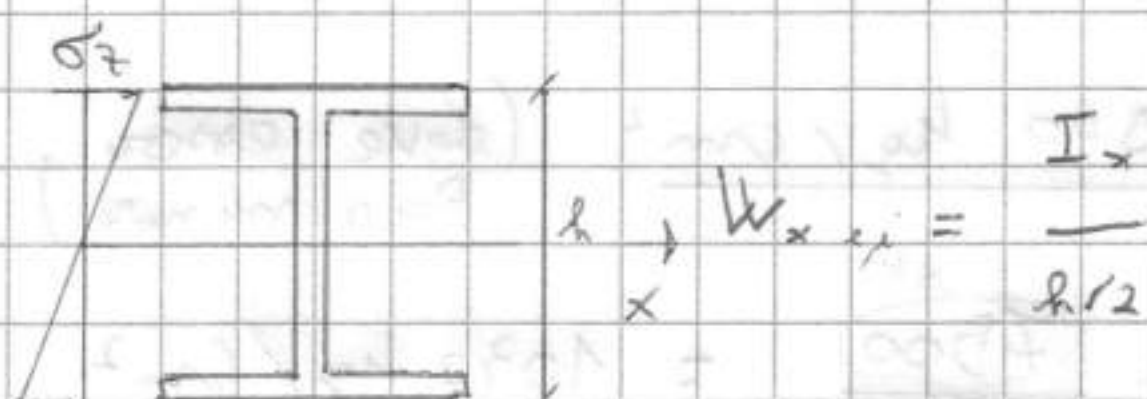
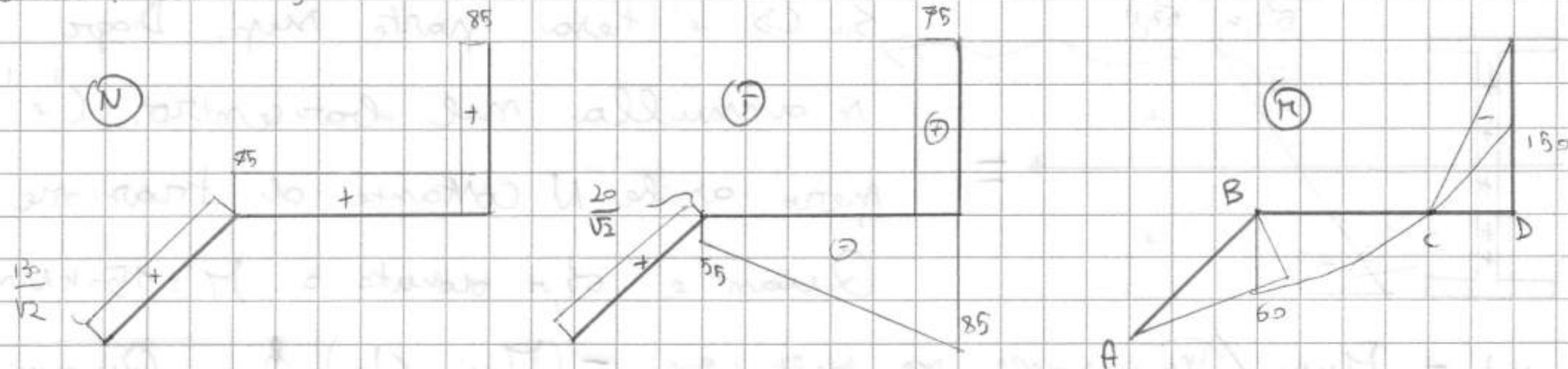
$$1) \text{ ok ; } 2) \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577 \Rightarrow \text{ok! } (\sigma=0 \Rightarrow \tau_{zy} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{id})$$

3) ∇ cost. elastiche materiale, lav. elast. \neq da ν, E, G .

4) μ non distingue trat. e comp. (problema x materiale lapidei,

MA non per l'acciaio).

(Sola: esercizio)



Da formula di Navier ($\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$)
ricordo formula x le predimensionamen-
to.

$$|\sigma_{max}| = \frac{M_{max}}{W_{x, e, i}}$$

Ragionando con ten. ammissibili, scelto il tipo
di materiale ho il suo σ_{amm} . Qui $\sigma_{amm} = 1900 \frac{kg}{cm^2}$

\equiv FE 430. Se struttura e' soggetta solo a M flettente,

devo vedere: $\frac{M_{max}}{W_{x, min}} > \sigma_{amm}$ x ottenere $W_{x, min} = \frac{M_{max}}{\sigma_{amm}}$ limite

Qui M_{max} e' tra elem. vert. e orizz., tendo le fibre superiori (oriz.)
e quelle a sx (verticali), entrambi di $150 kN \cdot m$.

Valore utile x entrambi i predimensionamenti. Attento alle unita'
di misura (approx q a 10) $150 kN \cdot m = 15 t \cdot m = 15 \cdot 10^5 kg \cdot cm$

Quindi $W_{x, min} = \frac{15 \cdot 10^5}{1900} = 789,47 cm^3 \rightarrow$ con questo valore

vedo le tabelle dei profilati (nei W_x). Premo il 1° valore $>$
di questo. Per gli IPE scelgo IPE 360 che ha $W_x = 904 cm^3$ [ex

se avessi IPE con $W_x = 800$ non e' buono, non e' cautelativo a causa tracc. effetti]

\rightarrow La $\sigma_{sx} > \sigma_{sx}$, quindi x ora mi cautelo. Per gli HE ci sono

la HE 260 A ($W_x = 836 cm^3$) e la HE 240 B ($W_x = 838 cm^3$). Si puo'

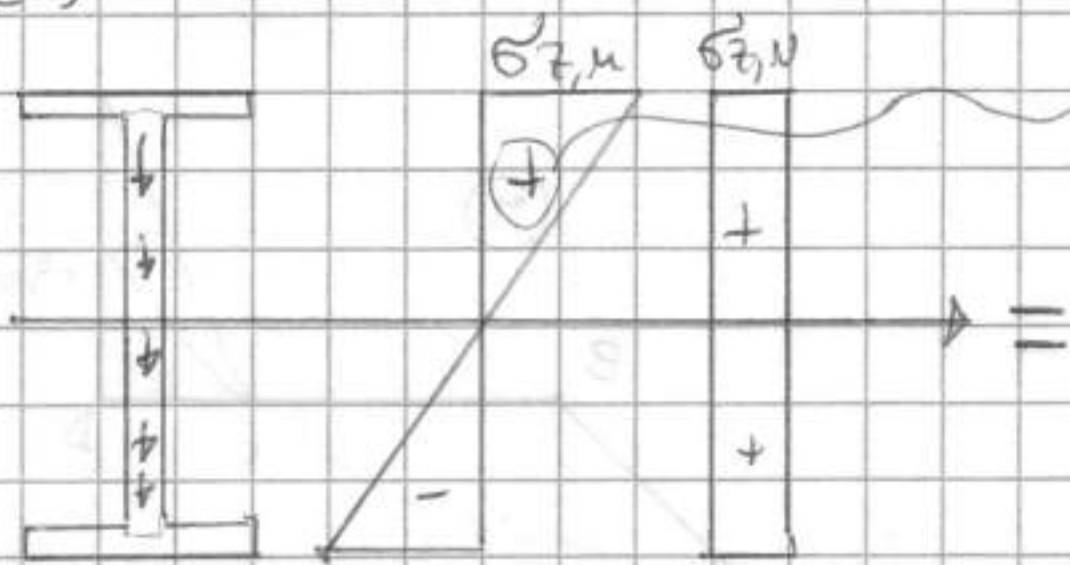
distinguere progetti elementi verticali e orizzontali. Per elementi

verticali e' meglio e' HE mentre x orizz. e' okog. gli IPE.

Per ABC con $M_{max} = 60$, per CDE $M_{max} = 150 \rightarrow$ VERIFICA DI

RESISTENZA (calcoliamo σ v n.t.)

(IPE 360)



Su CD e' terza parte sup. Diage.

si annulla nel baricentro. C'e' pero' anche N costante di trazione

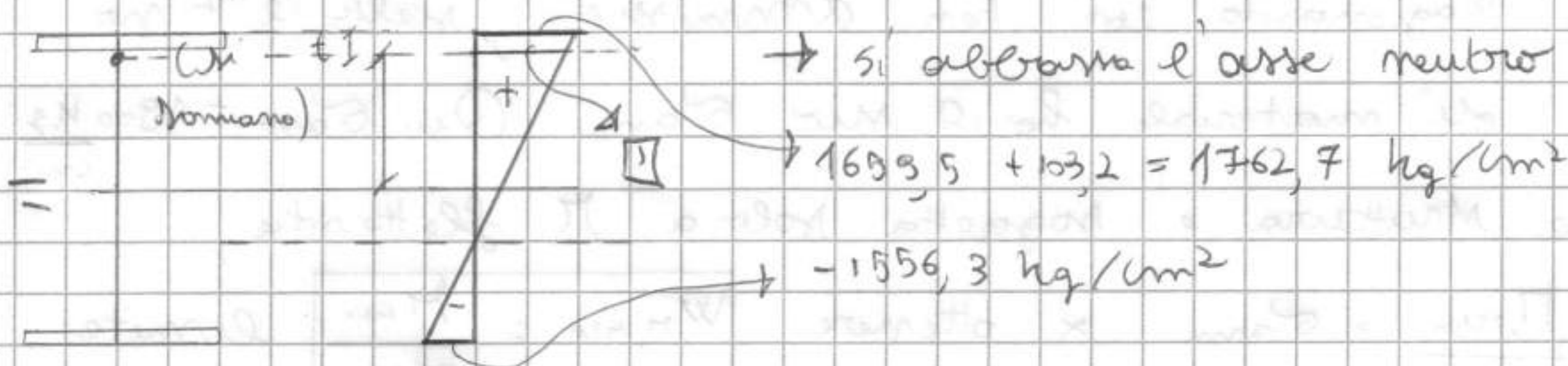
Quanti e' $\sigma_{z,N}$ dovuta a $N = 150 \text{ kN}$!

$$|\sigma_{z \max, M}| = M_{\max} / I_x \rightarrow \text{della sez. scelta} = 904 = (M_{\max} / I_x) \cdot \frac{h}{2} \quad \text{Quindi}$$

$$|\sigma_{z \max, M}| = \frac{15 \cdot 10^5}{904} = 1659,5 \text{ kg/cm}^2 < 1900 \text{ kg/cm}^2 \quad (\text{deve essere poco minore})$$

$$|\sigma_{z \max, N}| \text{ [vedi tr. N sempre]} \rightarrow \sigma_{z,N} = \frac{7500}{16270} = 103,2 \text{ kg/cm}^2$$

Il diagramma diventa (+ = trazione)



Per le verifiche di resistenza di σ_x si guarda l'interfaccia anima/ala.

Si deve essere f. Natur in forma originale + contributi N.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_x} \left(\frac{h}{2} - \left(\frac{h}{2} - 1,27 \right) \right) = 103,2 + \frac{15 \cdot 10^5}{16270} \left(\frac{36}{2} - 1,27 \right) = 1645,6 \quad (\text{non attento!})$$

deve essere molto vicino a 1762,7). γ sono di 1 ordine di g in - su σ .

Sia non devono essere $\gg 0 \ll 5 \text{ mm}$.

Valutiamo M. term. involto del TSG (f. di Jourawsky). Si considera

solo τ_{zy} (non τ_{zx}). $\tau_{zy} = \frac{T}{I_x} \frac{S_x^*}{b(y)}$ Per sez. rettangolare

$b(y)$ e' costante; nell'IPE inizialmente incontro

ala, b grande e τ piccole \rightarrow poi istantaneamente passo a

meno anima $\Rightarrow \tau \uparrow$ bruscamente. Anomamente poi non e'

lineare con y. $S_x = A \cdot d$; premolo y a partire

da extradosso, $d = \frac{h}{2} - y'$, quindi $S_x = b y' \left(\frac{h}{2} - \frac{y'}{2} \right) =$

$$= b \cdot \frac{h}{2} y' - \frac{b}{2} y'^2$$

; all'extr. area e' nulla; se $y' = -h/2 \Rightarrow 0$

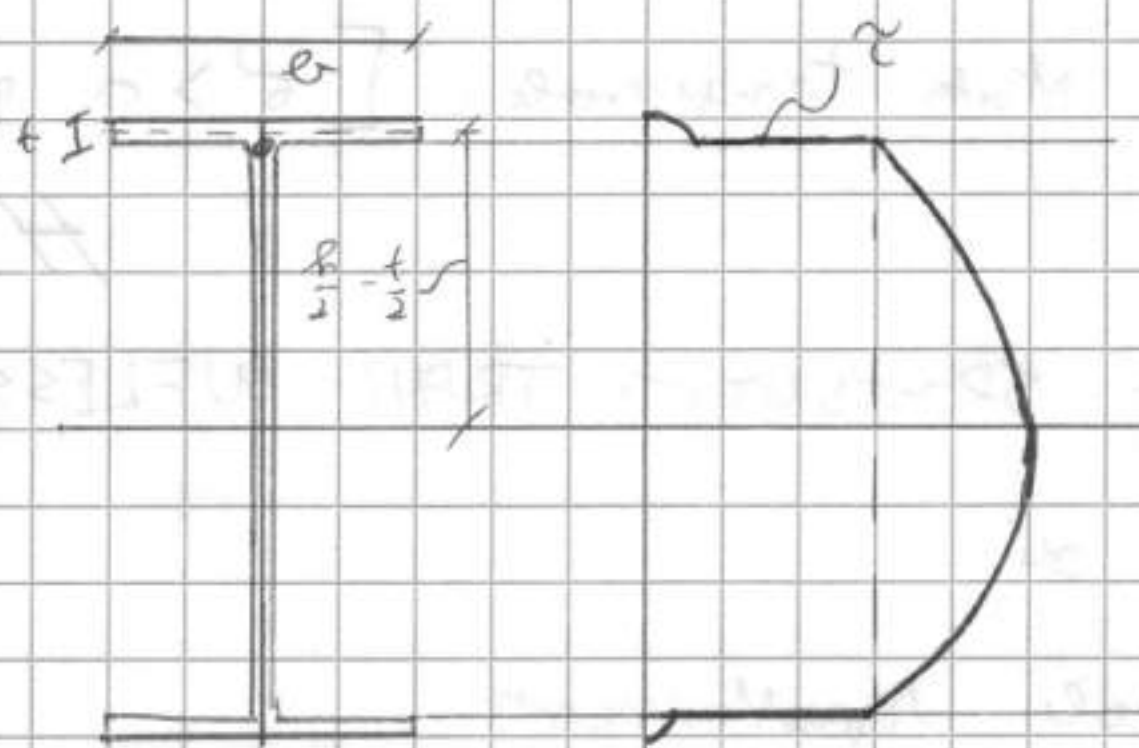
(S simp. ad asse bar.). Anomamente S

e' PARABOLICO



→ le τ_{xy} hanno andamento

simile:



τ_{max} e' nel baricentro e vale:

$$\tau_{max} = \frac{T}{I_x} \frac{S_x}{t}$$

Vedi in tabella
M.R. di massa
sezione

Anche qui interessa calcolo nell'incontro ala/anima (ne' σ e ne' τ non transcurabili):

$$\tau = \frac{T}{I_x} \frac{S^*_{ala}}{t} = t \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

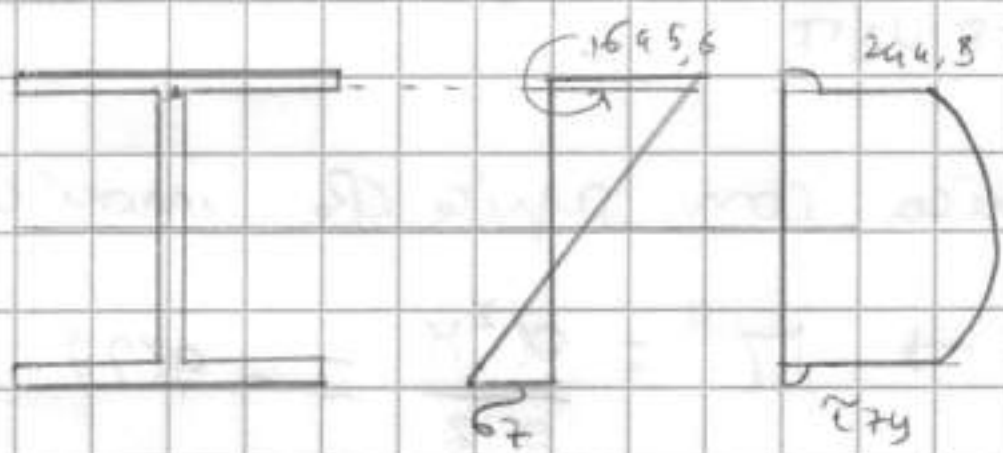
Nel nostro caso sez. Va verificata sia nella parte vert. e sia AA.

Quindi $\tau = 244,8 \text{ kg/cm}^2$, quindi in quel punto si ha

$$\sigma_{id} = \sqrt{1645,6^2 + 3(244,8)^2} = 1699,3 < \sigma_{lim}$$

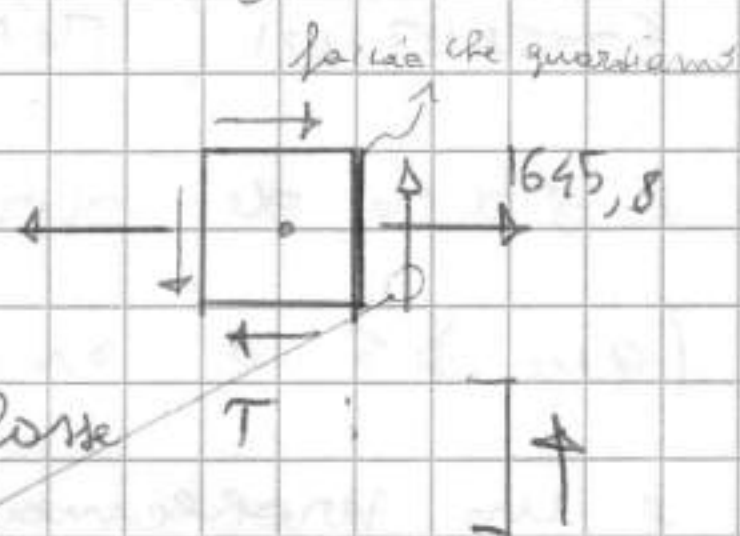
Tracciare la circ. di Mohr

30/3/06



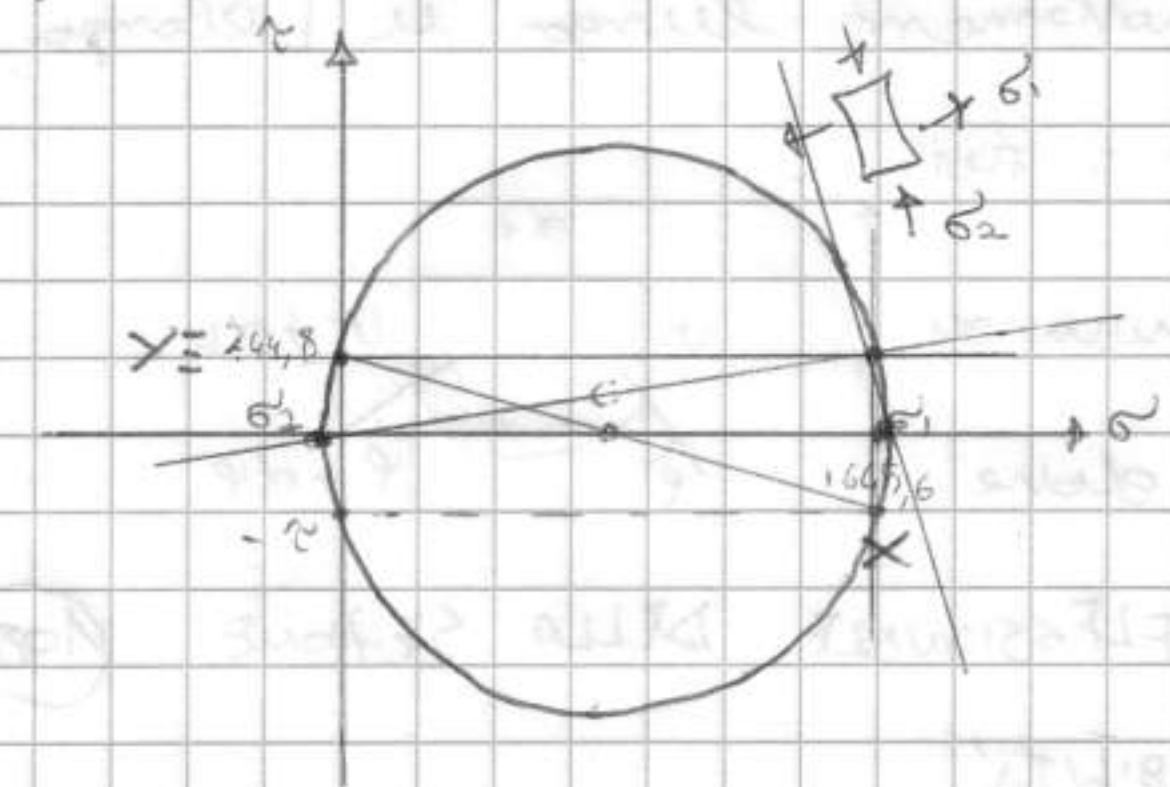
Mostra l'elemento di trave dove hai fatto i calcoli.

(trazione)



La distribuzione delle τ ha come risultante T . Se fosse T ↓ avrei ↑ altrimenti verri opposti.

Su CD, τ era negativo (↑ ↓ → ↓) si prende τ con stesso verso T ; fissato 1 verso, per equilibrio fissa tutti gli altri (e con stesso modulo: $\tau = 244,8$).



giro in senso antiorario ⇒ negativo
X(1645,6, -244,8). Y e diam. opposti

Sulle grad. vert. ho solo τ [$\sigma = 0$]

X ⇒ τ . Si trova quindi il centro C

(1645,6, 0) ⇒ traccia circ.

Tracce K e le dist. principali (intersezione con min e max tensioni) e quindi calcola α . Poi orienta elemento su dist. principali e indica stato tensionale. [$\sigma_1 > 0$ quindi di trazione]

H

CALCOLO SPOSTAMENTI TRAVI INFLESSE

Ipotesi di:

1) Piccoli spostamenti

2) Legame σ e ϵ elastico lineare

3) Trave di S. Venant (+ restrittive del continuo di Cauchy)

Conc. trave inizialmente rettilinea con sezioni \perp all'asse della trave e rimangono tali anche nella conf. deformata [sez. si conservano piane] \rightarrow 4) Ipotesi di conservazione delle sezioni piane (coerente con Navier)

Per travi rettilinee \rightarrow eq. indefinite di equilibrio, cioè $\frac{dT}{dz} = -q(z)$ e $\frac{dM}{dz} = T \rightarrow$ sono DERIVATE SOSTANZIALI (rispetto a var. spaziale) si indica con apice che indica l'ordine di derivazione. $T' = -q(z)$; $M' = T \rightarrow M'' = \frac{d^2 M}{dz^2} = -q(z)$

(qui D.S. è anche il differenziale della funzione, è un problema piano).

Ogni punto trave deformata si può rappresentare con 3 campi di spostamenti: $u(z)$ [sp. orizzontale], $v(z)$ [sp. verticale], $\varphi(z)$ [rot. punto = punto dell'asse].

Conc. che carichi flettenti non generano spostamenti lungo u [elongazioni o contrazioni]. Poss. avere: [φ = rot. della trave]

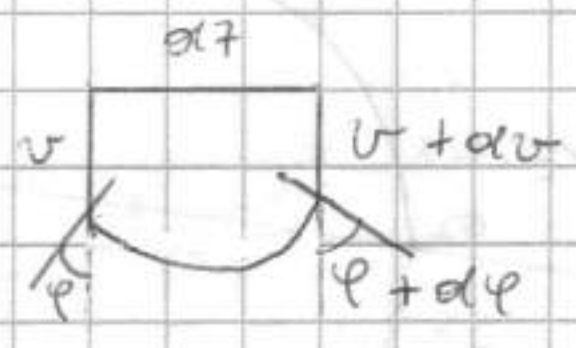
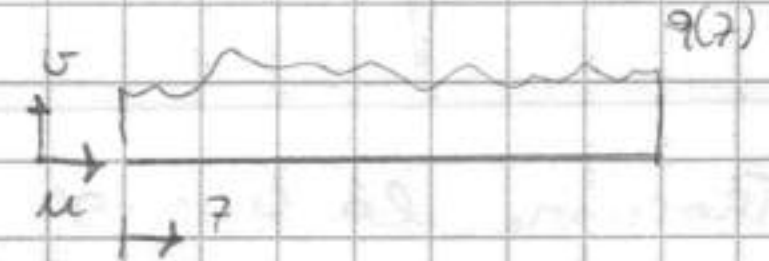
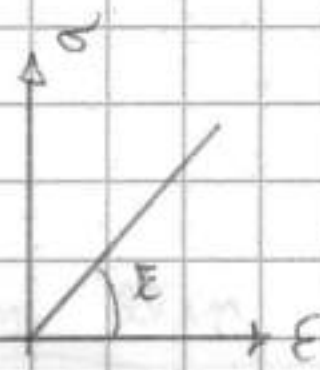
Ci riferiamo ad 1 misura di

def. LA CURVATURA: $\chi(z) = -\frac{M(z)}{EI(x)}$ dove

EI_x = RIGIDEZZA

FLESSIBILITÀ DELLA SEZIONE

Il suo inverso è detto CEDevolezza o FLESSIBILITÀ



Con la 4) e la costante della sezione, la rigidezza è costante

($\pi \equiv -X$) [con trave con stesso materiale a sezioni piatte e costanti]

Se ho $f(z)$, la curvatura $X = \frac{f''(z)}{(1+f'(z)^2)^{3/2}}$. Vogliamo determinare $v(z)$,

cioè lo spostamento dell'asse della trave. Quindi $X = \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}}$ (rel.

differentiale). Con la 1) queste sono piccole q. [v'^2 è ancora + piccola \Rightarrow


$1+v'^2 \approx 1$]. Allora $X(z) \approx v''$, ho relazione spostamento/

mom. flettente: $v'' = X(z) = -\frac{\pi(z)}{EI}$ → EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA

LINEA ELASTICA → è la f. che descrive l'abbassamento flessionale punto per punto della linea d'asse.

Integrando l'eq, ho $v' = \int -\frac{\pi(z)}{EI} dz + C_1$. X definisce la rot.

della sezione, quindi v' è la f. di rotazione: $\varphi = v'$.

 Se punto ruota solamente di φ , la $v = \varphi dz$ [spost. rigido], nella realtà c'è ulteriore v dovuto a deformazione,

ho incremento $d\varphi$ di rotazione, ho variazione misurata da curvatura:

$$d\varphi = X dz$$

Integrando di nuovo φ ho lo spostamento: $v = \int \left(\int -\frac{\pi(z)}{EI} dz \right) dz +$

$C_1 z + C_2$ → espressione della linea elastica solo per travi elastiche

Conosciute v a meno di 2 cost. che a sta cond. a contorno.

H



Eq. valide in sezioni regolari, eq. di classe C^∞ .

Se avessi var. di carico + carichi concentrati

dovrei fare ulteriori consid. Ora con travi

regolari. / $T(z) = \frac{qL}{2} - q(z)$, $\pi(z) = q\frac{L}{2}z - q\frac{z^2}{2}$

Con l'eq. di $\pi(z)$ e con l'ip. che $EI_x = \text{costante}$

ho direttamente X : $v'' = -\frac{1}{EI} \left(q\frac{L}{2}z - q\frac{z^2}{2} \right)$. Integro:

$$v' = \frac{1}{EI} \int \left(\frac{qz^2}{2} - q\frac{L}{2}z \right) dz + C_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{qz^3}{6} - \frac{qL}{4}z^2 \right) + C_1$$

to integro ancora: $v = \int \frac{1}{EI} \left(\frac{qz^3}{6} - \frac{qL}{4}z^2 \right) dz + C_1 z + C_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{qz^4}{24} - \frac{qL}{8}z^3 \right) +$ (103)

$$-\frac{qL}{12}z^3) + C_1z + C_2 \quad \text{Come calcolare } C_1 \text{ e } C_2?$$

In alcuni punti della trave no le condizioni: i vincoli $[v_A = 0 \text{ e } v_B = 0]$ non permettono abbastanza. \rightarrow le brucia nell'eq.

In A, $z=0$, quindi $v(0)=0$. Dall'eq. di v ho $C_2=0$

$$\text{In B, } z=L, \text{ quindi } v(L)=\frac{1}{EI}\left(\frac{qL^4}{24} - \frac{qL^4}{12}\right) + C_1L = 0 \rightarrow C_1 = \frac{1}{L} \frac{1}{EI} \left(-\frac{qL^4}{24}\right) =$$

$$C_1 = -\frac{1}{EI} \frac{qL^3}{24} \Rightarrow v = \frac{1}{EI} \left(\frac{qz^4}{24} - \frac{qLz^3}{12} \right) - \frac{1}{EI} \frac{qL^3}{24} z \rightarrow \text{posso calcolare lo spostamento}$$

e la rotazione θ p.to della trave $\theta = v' \times$ predimensionamento

in esercizio. Ex: predim. struttura che abbia $v_{max} \leq \frac{L}{400}$

Dobbiamo trovare le p.to di spostamento max (materiali) \Rightarrow calcolare

$$v\left(\frac{L}{2}\right) \rightarrow (\text{si e diff. trova la funzione}) \quad \text{qui } v_{max} = v\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\text{Sost } z=\frac{L}{2} \text{ in } v \rightarrow \text{EI} \cdot v\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{qL^4}{384} - \frac{qL^4}{96} + \frac{qL^4}{48} = \frac{qL^4 - 4qL^4 + 8qL^4}{384} =$$

$$= \frac{5}{384} qL^4 = v_{max} \cdot \text{EI} \rightarrow \text{Impongo la condizione sostituendo a}$$

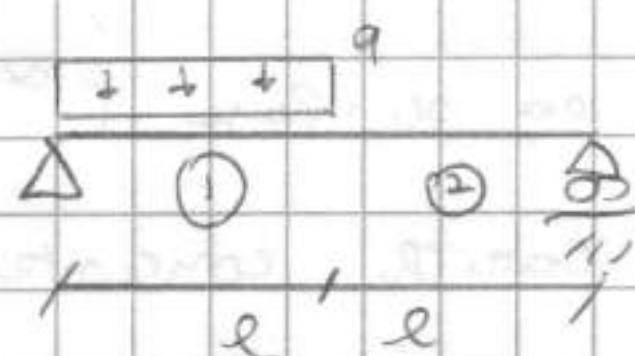
$v_{max} = \frac{L}{400}$ e calcolo in $f(I_x)$, quindi scelgo profilo opportuno.

$$\frac{5}{384} qL^4 = \frac{L}{400} \text{EI} \Rightarrow \boxed{\frac{2000}{384} \frac{qL^3}{3} = I_{x,min}}$$

$$v'' = -\frac{M(z)}{EI(x)}$$

\rightarrow spostamento L

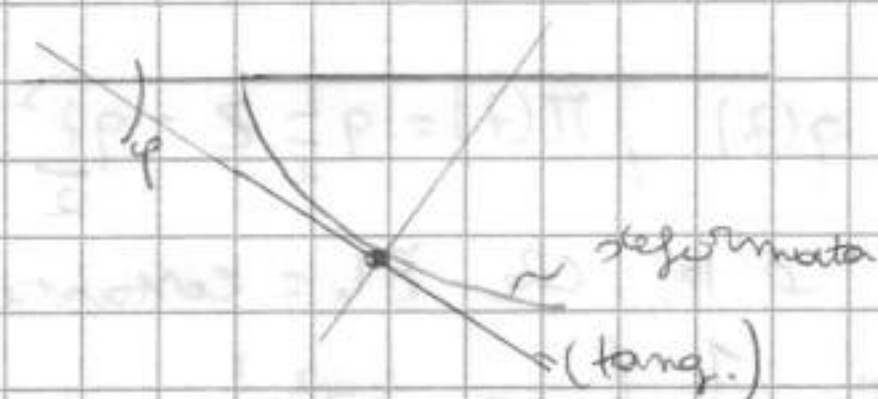
alla linea d'asse



$\varphi = v'$. Integrando lungo z abbiamo

lo spost. punto x punto con delle costanti che d da cond. di vincolo.

Consideriamo ora una discontinuità (otteni-
bile anche con sez. non costante [varia I]



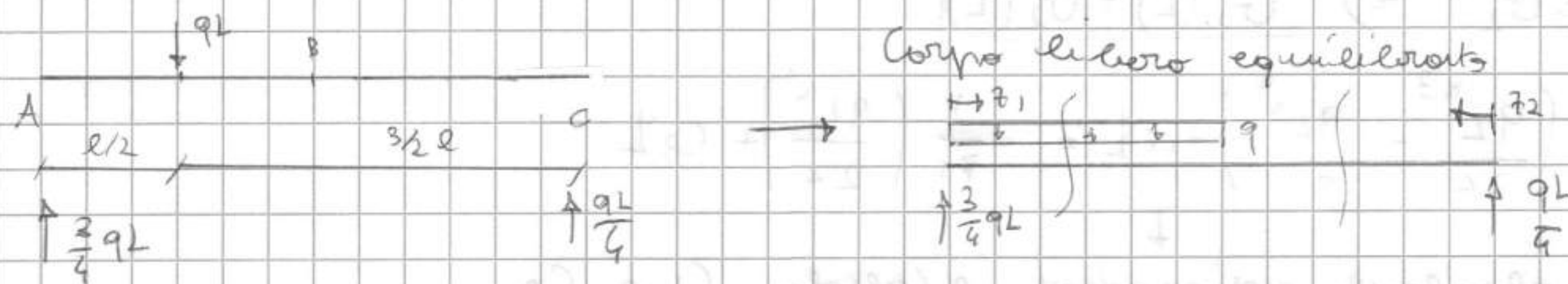
o con materiali diversi [varia E], con forza concentrata).

Distinguiamo ① e ② in questi effettuiamo integrazione.

[Calcoli ancora a meno di costanti] ↓

①: $V_1'' = - \frac{\pi_1(z)}{EI_x}$; ②: $V_2'' = - \frac{\pi_2(z)}{EI_x}$ → al oen in questo caso ho stessa quantità

Risoluzione Matrici:



Su ①, $\pi_1(z) = \frac{3}{4} qLz - \frac{qL}{2} z^2$; su ②, $\pi_2(z) = \frac{qL}{4} z$

Sostituendo, $V_1'' = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{qL}{2} z - \frac{3}{4} qLz \right)$ e $V_2'' = - \frac{1}{EI_x} \left(\frac{qL}{4} z \right)$

Integriamo le equazioni:

①: $V_1' = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{qL}{6} z^2 - \frac{3}{8} qLz \right) + C_1$

$V_1 = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{qL}{24} z^3 - \frac{3}{16} qLz^2 \right) + C_1 z + C_2$

②: $V_2' = - \frac{1}{EI_x} \frac{qL}{8} z^2 + C_3$

$V_2 = - \frac{1}{EI_x} \frac{qL}{24} z^3 + C_3 z + C_4$

→ anolamento Rot.

e spostamento V

zona. Devo imporre conca. su bordo.

Se eq. e' continua ante' imporre eq. ai

bordi, ora nono

oliveri. [①: A, B ; ②: C, B]

Per ① impongo condizioni in A, per ② in C ; in B imposto le condizioni di CONTINUITA' di tipo cinematico.

A vincola 1 g.d.l. \Rightarrow 1 condiz. , con come in C. Le 2 condizioni mancanti vanno imposte in B (e \equiv probe dell con conca. a continuo)

A: Vincola V_1 (e non V_1' perche' in A puo' ruotare)

$V_1(0) = 0 \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$

C: Vincola V_2 (z parte da C)

$V_2(0) = 0 \Rightarrow \underline{C_4 = 0}$

B: Ipotesi di CONGRUENZA $\varphi^B = \varphi_2^B$ (stessa rotazione)

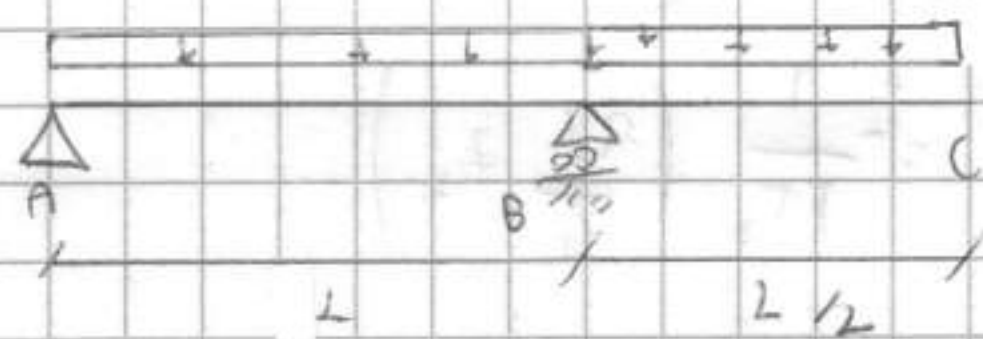
$U_1(L) = U_2(L)$

$$1) \frac{1}{EI} \left(\frac{qL^3}{6} - \frac{3}{8} qL^3 \right) + C_1 = -\frac{1}{EI} \frac{qL^3}{8} + C_3$$

$U_1^B = U_2^B \Rightarrow U_1(L) = U_2(L)$

$$2) \frac{1}{EI} \left(\frac{qL^4}{24} - \frac{qL^4}{8} \right) + C_1 L = -\frac{1}{EI} \left(\frac{qL^4}{24} \right) + C_3 L$$

2 eq algebriche indipendenti e calcolo C_1 e C_3 .



→ 2 eq diff. [discontinuità a causa del vincolo]

S' possono usare solitamente (sol. statiche determinate).

Dal p.to di cinematica:

1) Tra i 2 appoggi ho inflessione come trave appoggiata.

ma l'altro tratto si muove
senza deformarsi perché in appoggio
ruota. Quindi devo risolvere schema



trave appoggiata [logico U_C], poi annullare φ in B, considerando φ_B , essendo spost. rigido $U_C^{\text{rig}} = \varphi_B \cdot L/2$ (spostamento ha segno che è dalla deformata).

Per trave appoggiata: $U_1' = \frac{1}{EI} \left[\frac{qz^3}{6} - \frac{qL}{4} z^2 + \frac{qL^3}{24} \right]$

Quindi $\varphi_B = \frac{1}{EI} \left(\frac{qL^3}{6} - \frac{qL^3}{4} + \frac{qL^3}{24} \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{4qL^3 - 6qL^3 + qL^3}{24} \right) =$

$= \frac{1}{EI} \left(-\frac{qL^3}{24} \right) \Rightarrow$ conv. rotation e inflessione: (positive le

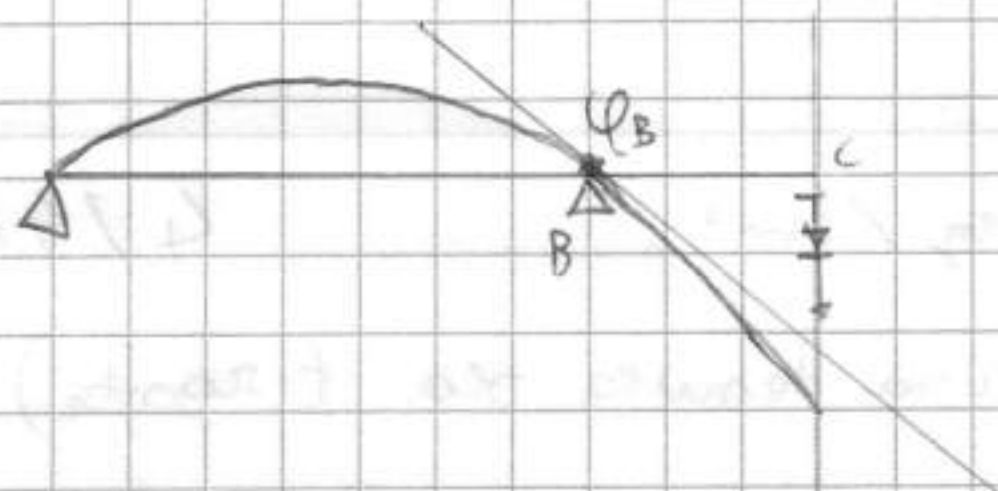
rot. orarie). Mi interessa come si muove il tratto a

scelta che può solo alterare

$$U_c^0 = \frac{1}{EI_x} \frac{qL^3}{24} \cdot \frac{L}{2} = \frac{1}{EI_x} \frac{qL^4}{48}$$

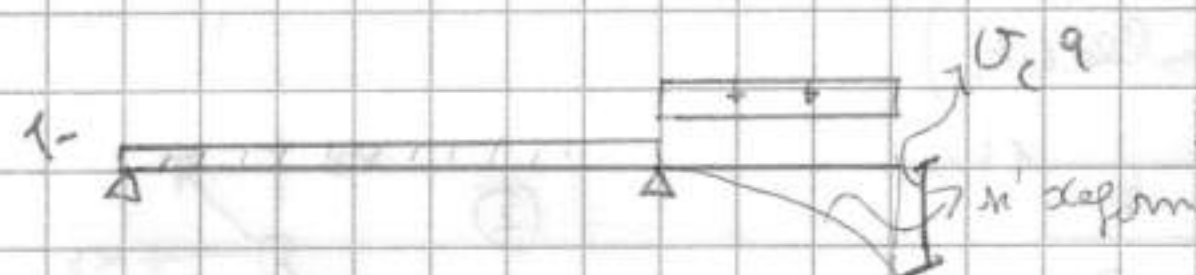
Ora conr. 2)

Si può risolvere in 2 sottoproblemi. Carico agisce su menzola che però non è completamente incastata. Problema diverso



la rot. in B \Rightarrow altera C perché anche il carico ha il suo effetto; 2 contributi verso il basso.

$$H_0 \phi_B^0 \cdot \frac{L}{2} + U_c \text{ (calcolato a } q)$$



Corpo rigido; $[EI_x = \infty]$ flessibile.

2- Due sottoproblemi:

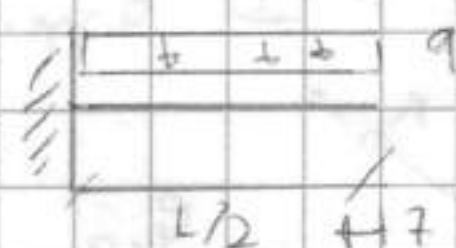


(analizzare il carico facendo ruotare B)

1- Considero il tratto ∞ rigido e vedo la

deformaz. nella menzola.

Facciamo calcoli su:



(1 eq.)

+



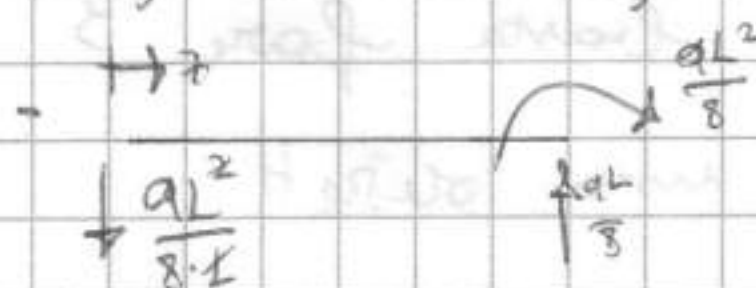
$$\frac{qL}{2} \cdot \frac{L}{4} = \frac{qL^2}{8}$$

[menzola soggetta a M generata dal tratto a destra]

- Parto da $U'' = - \frac{\pi(z)}{EI_x} = \frac{qz^2}{2} \cdot \frac{1}{EI}$ Integro due volte:

$$U' = \frac{qz^3}{6} \cdot \frac{1}{EI} + C_1 \Rightarrow U = \frac{qz^4}{24} \cdot \frac{1}{EI} + C_1 z + C_2 \quad \text{Im } z=0 \text{ non}$$

potrei imporre nulla, sull'incastro invece $U'(\frac{L}{2}) = 0$ (e ottengo C_1) e $U(\frac{L}{2}) = 0$ (e ottengo C_2) [Met. a disaccoppiato]



io π applicato in cerniera

$$\pi(z) = -\frac{qL}{8} z$$

\rightarrow mi serve solo $U'(B)$.

$$U'' = \frac{qL}{8} z \cdot \frac{1}{EI} \Rightarrow U' = \frac{qL}{16} z^2 \cdot \frac{1}{EI} + C_1$$

π tratta 1 condizione per determinare

C.

la soluzione finale è
$$U_c = U_c^{\textcircled{1}} - \left(U_c^{\textcircled{1}} + U_b^{\textcircled{2}} \cdot \frac{L}{2} \right)$$

Si possono raccogliere tutte le soluzioni notevoli per casi diversi (mensole e travi soggette a vari effetti) e usarle per risolvere problemi + complessi con le proprietà di sovrapposizione degli effetti.

ESERCIZIO:

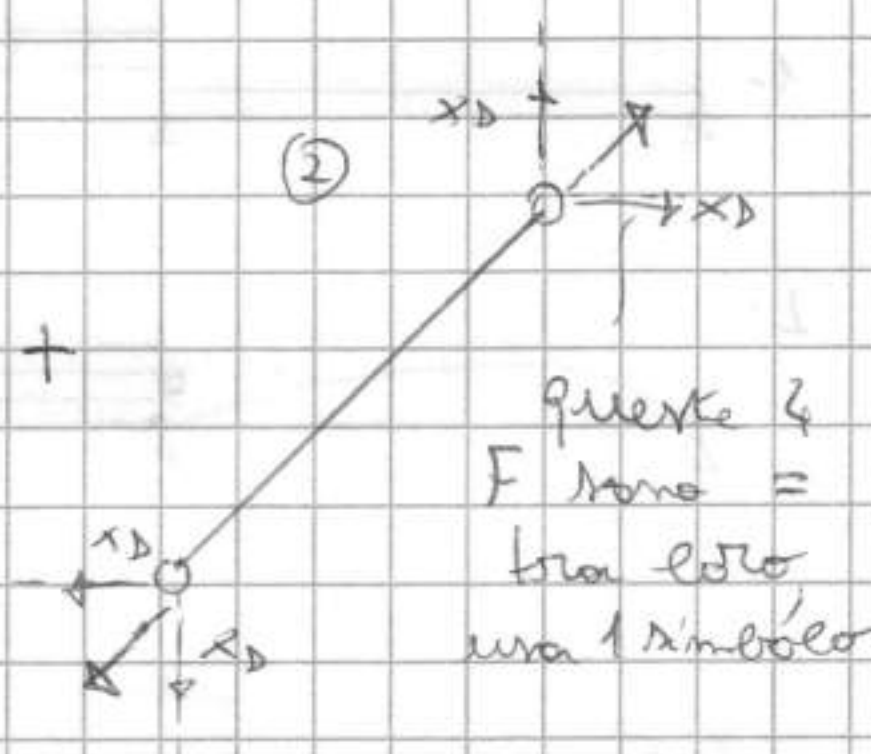
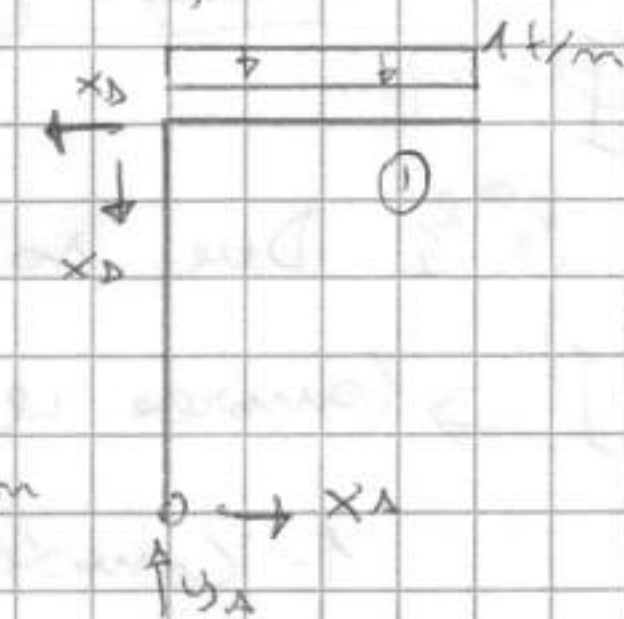
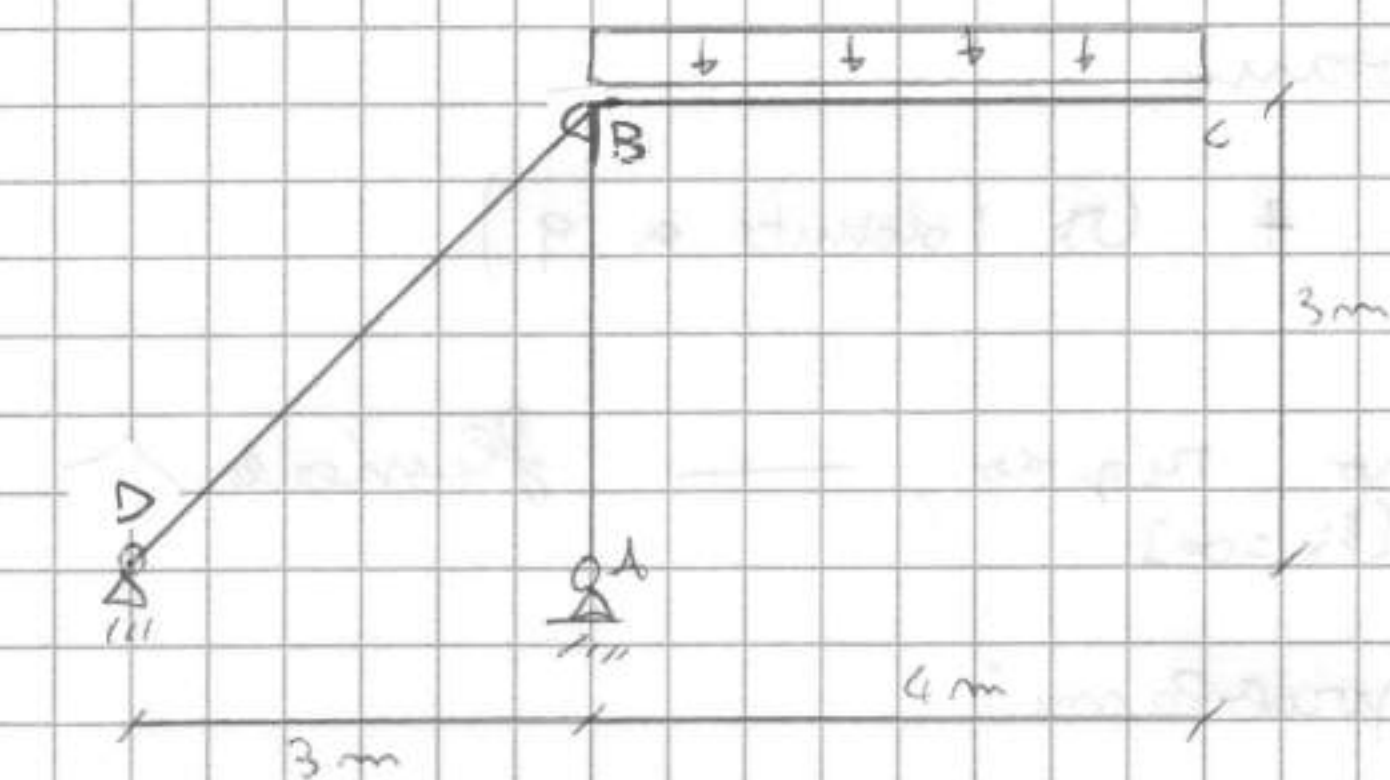
$P = 1 \text{ t/m}$

$\sigma_a = 2000 \text{ kg/cm}^2$

4/4/06

(ex. pensilina tenuta da tirante)

1: analisi qualitativa sistema (reat. vincol., sollecit.).



[Come question]

AMa collegata con due cerniere non soggetta a carichi e' in equil. solo se

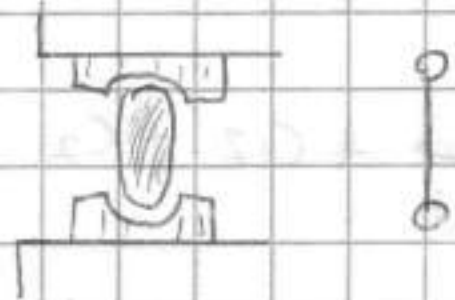
le reatt. tra le due cerniere passano attraverso la loro congiungente.

(X dalla forma) Se ci fossero delle $F \perp$ app.

a cerniere non c'è equilibrio (se corpo e' libero) Già

sappiamo quindi che se le sollec. delle F. di estremità, sono uguali +

e' un PENDOLO



≡ Corrello (ruota intorno a c. di base). Si appross

traiettoria circolare a t_0 (piccoli m) \Rightarrow spost. in sitta. e reazione

verticale. In questo modo (mag. qualitativo) basta fare 3

eq. e risolto. Se para sistema risolvendo con. una sollett.

risolvibile.

$-X_D + X_A = 0$, $+Y_A - X_D - 4 = 0$, $X_D \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 0$

(114)

Copiami quale eq ti da risultati incognite (eq. disaccoppiate, TRIANGOLAZIONE)

$$x_D = \frac{8}{3}; \quad x_A = \frac{8}{3}; \quad y_D = \frac{20}{3} \Rightarrow \underline{x_A = 2,67}; \quad \underline{x_A = 2,67}; \quad \underline{y_A = 6,67}$$

Consegna: Refai lo schema di corpo libero [con carichi, non con le loro risultanti] e controlla

l'equilibrio (intorno ad un altro

punto). Es. $\sum M_B: 2,67 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 0,01$

(arrotond.), c'è equilibrio.

Diagramma sollecitazioni: Demolo soggetto a $N = 2,67 \cdot \sqrt{2}$. Atto BC

non ha N e M AB è costante.

Togli: Ricorda rel. qualitative,

annoveranti reali. Su BC togli

deve essere lineare e π parabolico.

Poi in C devono essere nulle le

sollecitazioni. Su AB T è cost.

M nullo in C e A, M alta

verticale e lineare, M BC è

parab. In C = $\frac{1}{2} q \cdot \text{surf. } \pi$, T +

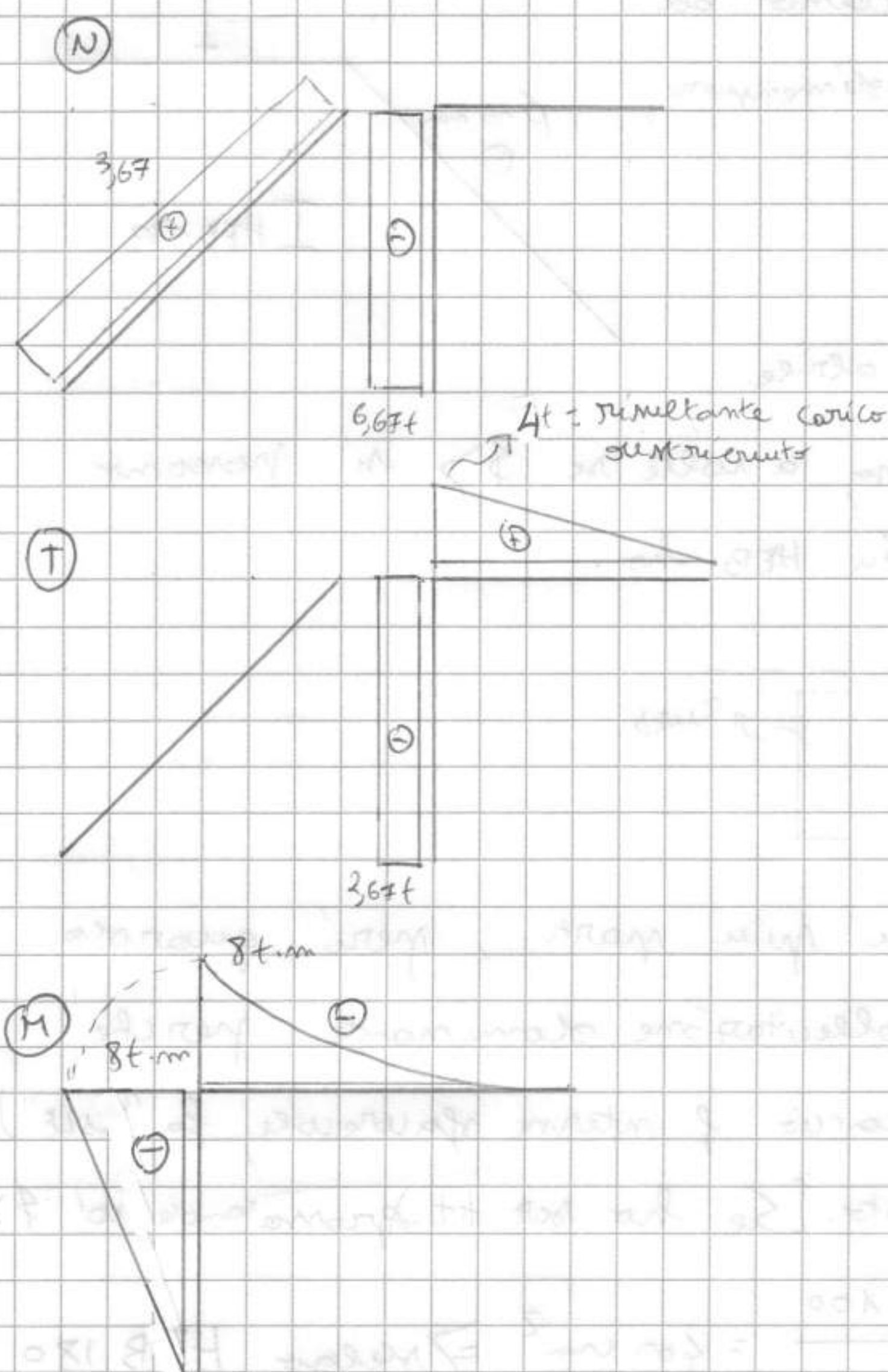
quindi perpendicolare aumenta

(diagramma dove ci non fibre

tense). Su alta verticale:

eq. al moso mi dice che

son tense parti di sinistra.



Di solito sono (+) un M che tende fuori da parte interna telaio, qui è parte esterna

Dimensionamento:

Tirante DB può essere a sez. circolare; asta BA \rightarrow HEB, BC \rightarrow IPE
(HEB: nati per portare flessione e sforzo normale, tipicamente pilastri).

Tondo ha $N = 3,76 t$ e ha $\sigma_{adm} = 2000 \text{ kg/cm}^2$. Esempio $\sigma = \frac{N}{A}$, per portare N devo avere area minima $A_{min} = \frac{N}{\sigma_{adm}} = \frac{3760}{2000} = 1,88 \text{ cm}^2$

[esempio Tondo] determino autom. diametro; \exists 10 mm, 12 mm, 14, 16...; si va di 2 mm in 2 mm; lo stesso per i pioli dove \exists anche 5, 10, 15, 20...]. Presumo diam = 16 mm $\rightarrow A = 2,01 \text{ cm}^2 \Rightarrow$ uso un $\phi 16 \text{ cm}$

$A = 2,01 \text{ cm}^2$ \therefore fa disegno e accanto ad

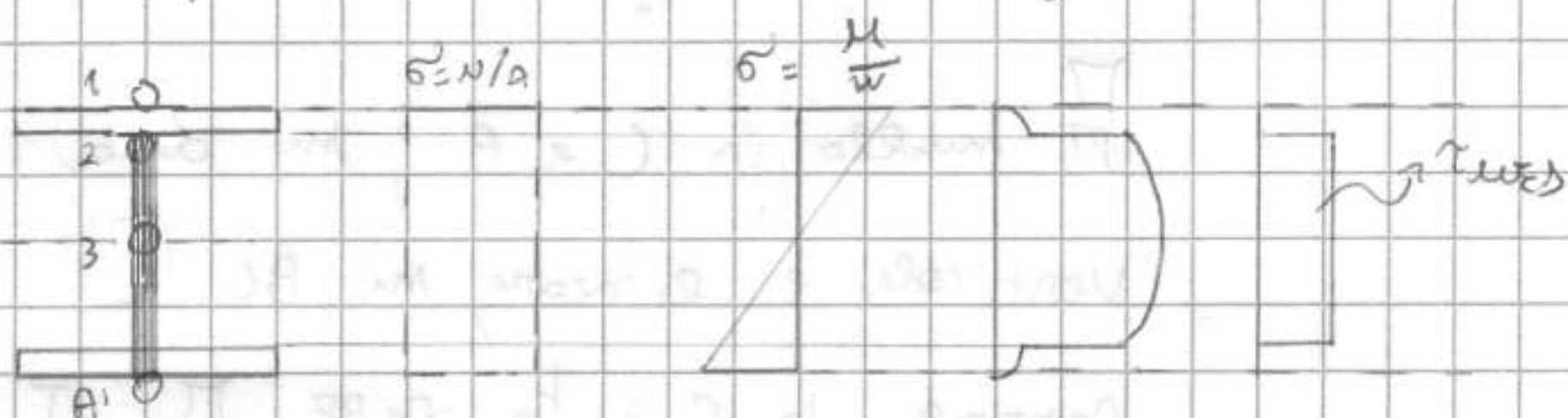
ogni asta si indica profilato e dimensioni;

utile \times fare i calcoli metrici.

Dim. asta verticale:

Soll. principale è M che è variabile

(noi le facciamo di 1 unico pezzo, a volte se $\$ >$ si possono fare pezzi di \leftrightarrow dimensioni). Su HEB ho:



In realtà si fanno verifiche in più parti, però quando quella di M massima (M è sollecitazione dominante perché è schema statico sfavorevole, braccio f. interne sfavorevole, fa "ruota").

Dimentr. a partire dal momento. [Se ho sez. troppo grande io! $\$ > 1$]

$$\sigma = \frac{M}{W} \Rightarrow W_m = \frac{M}{\sigma_a} = \frac{8000 \times 100}{2000} = 400 \text{ cm}^3 \Rightarrow \text{seleggo HEB 180}$$

(scrivi tutte le caratteristiche: $W = 426 \text{ cm}^3$, $A = 65,3 \text{ cm}^2$, $S_x = 241 \text{ cm}^3$)

Verifichiamo se va bene, nei doppi T [e tensioni sono min.]

in 1, 2, 3 [sopra, attacco, baricentro]

1) $\left[\text{essendo di compr. lo faccio in } A' \rightarrow A' \right] \sigma_z = \frac{6670}{65,3} + \frac{M}{W} = 1919 \text{ kg/cm}^2$

2) Ho σ della flessione in po' inferiore, stessa N ed effetto γ .

Rispetto a Jourawsky come 1° approx si può fare: γ risultante di γ è portata dall'anima dove è relativamente costante \Rightarrow tratto

$\gamma = \text{cost}$ solo nell'ala e $\gamma_{max} = \frac{T}{A_{anima}}$ Qui: $h_{anima} = 15,2 \text{ cm}$,

spessore $s = 0,85 \text{ cm} \Rightarrow A_{anima} = 12,92 \text{ cm}^2$. $T = T_{max} = 4000 \text{ kg} \Rightarrow$

$\gamma_{max} = 206 \text{ kg/cm}^2$, confrontiamo con γ_{max} , calcolabile con S_x :

$\gamma_{max} = \frac{T \cdot S_x}{I_x \cdot s} = 198 \text{ kg/cm}^2$ [errore piccolo e in eccesso \Rightarrow non]

γ dell'attacco ala/anima e non già verificate γ minori

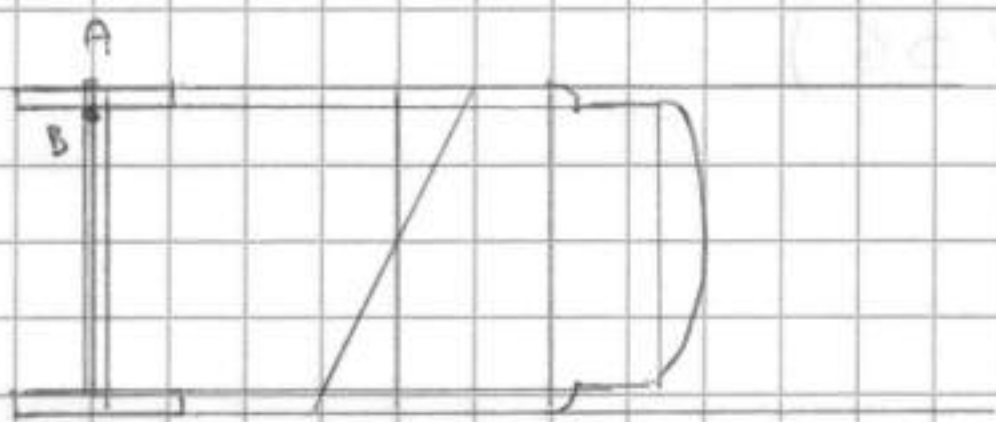
\Rightarrow esegui con le verifiche [se vuoi alla fine colcola γ esatta

con il criterio] \rightarrow CONTROLLO. $\sigma_z = \left(\frac{6670}{65,3} + \frac{102}{426} \right) + \left(\frac{800000}{426} \cdot 7,6 \right) = 1586$

1688 kg/cm^2 . Applico criterio Von-Mises. $(\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\gamma_{max}^2})$

$\gamma = \sqrt{198^2 + 206^2}$ e $\sigma_{id} = 1725 \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow$ non usare l'approx

Dim. asta orizzontale



Criterio della sovrappressione, anche qui $W_m = 400 \text{ cm}^3$ (N e lo stesso)

\Rightarrow uso IPE 270 con $W = 429 \text{ cm}^3$ + alto steel HEB, che pesa \approx

51 kg/m, mentre IPE $\approx 36 \text{ kg/m} \Rightarrow$ è + leggero e funziona ugualmente!

A aut. verificato (solo flex).

B: $\gamma_{max} = \frac{T}{A_m}$; $A_m = (-1,02 \times 2 + 267) = 26,8 \times 0,66 = 17,69 \text{ cm}^2 \approx 180 \text{ cm}^2$

$\gamma_{max} = 222 \text{ kg/cm}^2$. Verifica con V.M.M. $\sigma = \frac{800000}{429} \times (26,8 \times 0,66)$

e altera) $\Rightarrow \sigma = 1727 \text{ kg/cm}^2 \Rightarrow \sigma_{id} = 1769 \text{ kg/cm}^2$

(verificato anche in baricentro)

Circonf. di Mohr: contiene farlo in punti di combinazione σ e τ

\Rightarrow contr. di nuovo l'attacco alla l'anima. Ragionamenti fatti

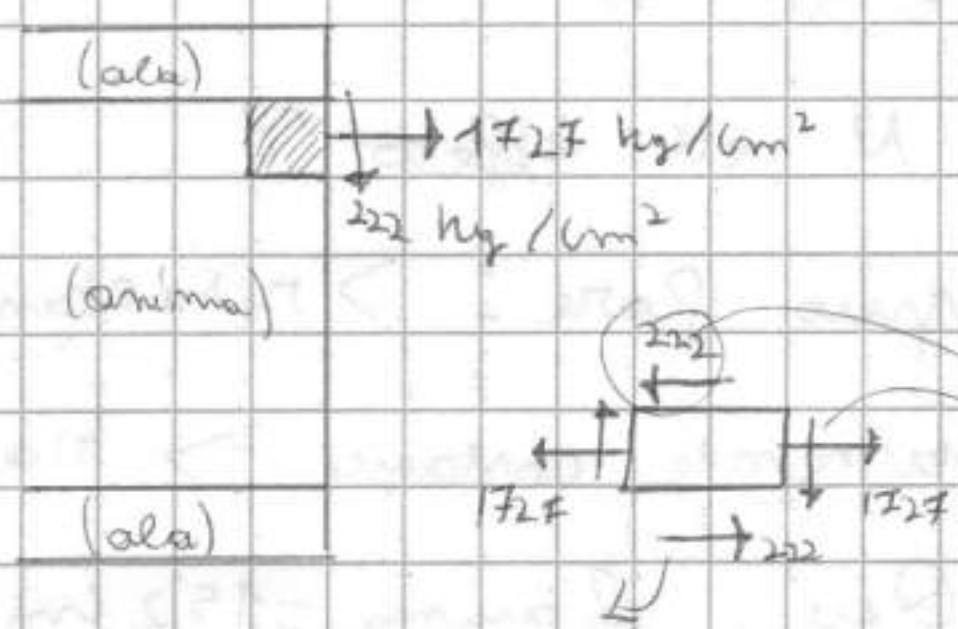
a membra anima costante, ma all'attacco

per richiesta (e arrotondamento) τ .

Elementi in B e' soggetto a trazione:

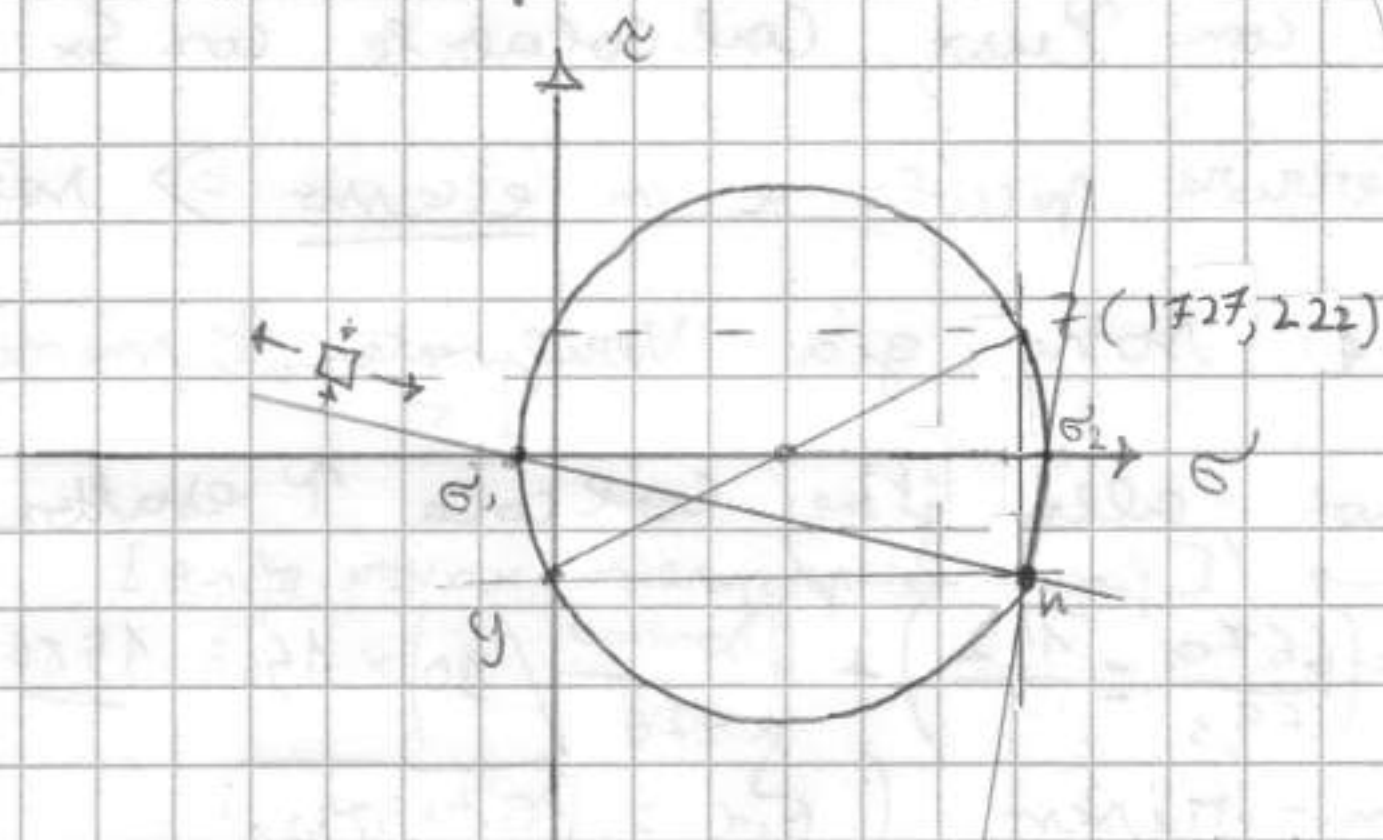
1727 kg/cm^2 ; τ erano in senso orario (+),

e' come il taglio.



Schema di equilibrio

Traccia circonf.



$\sigma_{orizz} = \sigma_z = \text{faccia di normale } z$,

σ_z accompagnato da τ positive

[metti in tela]; poi y [normale

la prima]. Congiungo e

traccia circonferenza. Calcolo

t. max e minime e in teoria

$\sigma_2 < \sigma_1$. Le dir. principali tramite $|x-z|$ e $-x-y$, trova il polo h e traccia le dir. (traz. >> compressione)

FINE CORSO (4/4/06)